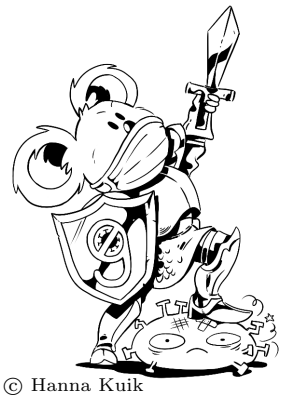


© Hanna Kuik

Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

IX edycja
2022

II etap
szkoły ponadpodstawowe

7 stycznia 2022

1. Zadań jest 8.
2. Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
3. Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
4. Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
5. **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
6. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
7. Czas pracy to 120 minut.

1. Sortowanie II

Janek napisał program sortujący. Program interpretuje liczby jako ciągi cyfr, np. liczba 103 jest interpretowana przez program jako: 1, 0, 3. Program porządkuje liczby najpierw według pierwszej cyfry, następnie według drugiej i tak dalej.

Przykład. Gdy polecimy programowi Janka posortować ciąg liczb: 10, 21, 11, 2, 100, 101, 215, 1, 111, to otrzymamy ciąg: 1, 10, 100, 101, 11, 111, 2, 21, 215.

Program otrzymał do posortowania ciąg:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, 1500.$$

Która liczba znajdzie się na tysiąc czterysta dziewięćdziesiątym czwartym miejscu po posortowaniu tego ciągu?

2. Policjanci na szachownicy

Na szachownicy 5×5 chcemy ustawić policjantów pilnujących pól szachownicy. Policjant pilnuje pola na którym stoi i wszystkich pól mających z polem policjanta wspólny bok (czyli graniczące w pionie lub poziomie). Pole może być pilnowane przez więcej niż jednego policjanta. Na każdym polu możemy ustawić dowolną liczbę policjantów. W każdym z poniższych zdań zastąpcie wielokropek przykładową liczbą tak, by zdanie było prawdziwe. Dokładnie uzasadnijcie, dlaczego zdanie jest prawdziwe.

(a) Można rozmieścić ... policjantów wg opisanych zasad tak, by każde pole szachownicy było pilnowane.

(b) Nie istnieje rozmieszczenie ... policjantów wg opisanych zasad, przy którym każde pole szachownicy byłoby pilnowane.

Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć (i uzasadnić) w (a), tym lepiej. Im większą liczbę potraficie znaleźć (i uzasadnić) w (b), tym lepiej.

3. Pchła i skoki wymierne II

Matematyczna pchła siedzi w układzie współrzędnych, w punkcie $(0, 0)$. W każdym skoku pokonuje odległość 1 i ląduje w punkcie o obu współrzędnych wymiernych. Uzasadnij, że pchła nie może wylądować po dwóch skokach w punkcie $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

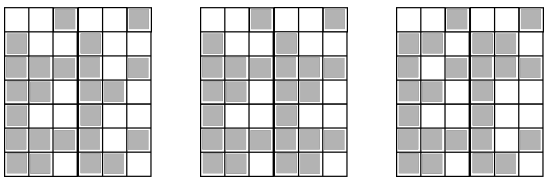
4. Ściana

Koala projektuje frontową ścianę 7-piętrowego biurowca. Każde piętro budynku ma wysokość 3 m i szerokość 18 m. Ściana ma się składać z 42 kwadratowych płyt o wymiarach 3 m $\times$ 3 m, z których każda jest wykonana w całości ze szkła lub drewna eukaliptusowego. Ponadto muszą być spełnione następujące warunki:

- Żadne piętro nie może składać się wyłącznie ze szklanych płyt lub wyłącznie z drewnianych płyt.
- Dwa sąsiednie piętra nie mogą wyglądać identycznie, ale nie mogą też mieć różnych wszystkich par płyt, należących do wspólnych pionów.

Na ile różnych sposobów koala może zaprojektować taką ścianę?

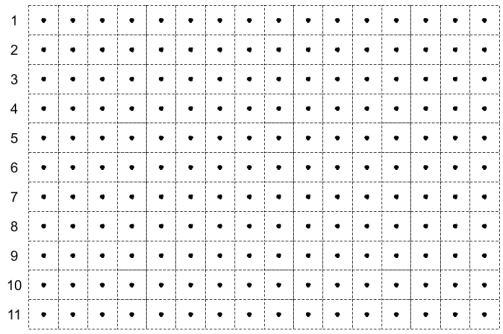
Z trzech poniższych projektów ściany tylko ten po lewej spełnia warunki zadania. Na środkowym rysunku drugie i piąte piętro są w całości drewniane, a na rysunku po prawej szóste i siódme piętro mają różne wszystkie pary płyt, należących do wspólnych pionów.



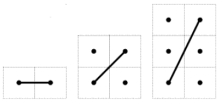
dobrze *źle* *źle*

5. Miś sadownik II

Miś sadownik w swoim sadzie ma 11 rzędów śliw po 16 drzew w każdym rzędzie. Drzewa są równomiernie rozłożone w pionie i poziomie, jak na rysunku.



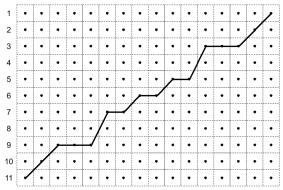
Przyjmujemy, że średnica pnia drzewa jest tak małą liczbą, że utożsamiamy go z punktem na płaszczyźnie. Miś sadownik zdecydował, że na czas zbiorów owoców podzieli sad na dwie części o tej samej liczbie drzew. Podział będzie wykonany na ukos: począwszy od pierwszego drzewa w ostatnim rzędzie aż do ostatniego drzewa w pierwszym rzędzie. Do wyznaczenia granicy zostanie użyta taśma przeciągnięta między drzewami; każdy odcinek taśmy będzie przymocowany na jeden z trzech dopuszczalnych sposobów:



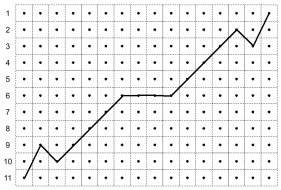
Na granicy dwóch części sadu powinno znaleźć się 16 drzew. Tych drzew nie zaliczamy do żadnej z części sadu. Na ile sposobów miś sadownik może podzielić sad na dwie części o identycznym kształcie i wielkości?

Wskazówka: Granica podziału musi być symetryczna względem punktu będącego geometrycznym środkiem sadu (nie trzeba tego uzasadniać).

Na rysunku po lewej jest jeden z poprawnych podziałów. Na rysunku po prawej jest przykład podziału, który nie spełnia warunków zadania, ze względu na zły kierunek niektórych ukośnych połączeń.



dobrze



źle

6. Przygotowania do turnieju

Koala przez cały marzec będzie się przygotowywać do turnieju szachowego. Planuje codziennie (także w soboty i niedziele) rozgrywać przynajmniej jedną partię szachową, a razem rozegrać dokładnie 48 partii. Czy zawsze można znaleźć dzień lub ciąg kolejnych dni w marcu, w czasie których koala rozegra łącznie dokładnie 13 partii? Jeśli tak, to uzasadnijcie, dlaczego tak sądzicie. Jeśli nie, podajcie przykładowy rozkład partii w marcu, który nie spełnia tego warunku.

© Hanna Kuik

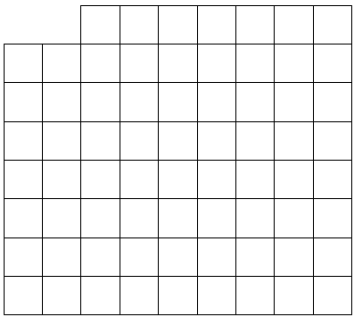
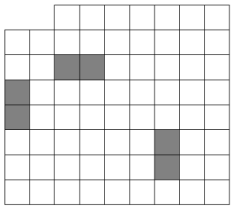
7. Przed sądem II

Na wyspie mieszkają rycerze, którzy zawsze mówią prawdę, łotrzy, którzy zawsze kłamią i zwykli ludzie, którzy czasem kłamią, a czasem mówią prawdę. Doszło na niej do przestępstwa i sąd ustalił, że przestępca nie jest zwykłym człowiekiem. Oskarżony przed sądem może wypowiedzieć tylko jedno zdanie, być może złożone. Jakim zdaniem osoba niewinna i niebędąca rycerzem może przekonać sąd o obu tych faktach? Zakładamy, że sędziowie pracujący na wyspie są doskonali w dedukcji.

„zawsze mówią prawdę” oznacza, że każde wypowiedziane przez nich zdanie jest prawdziwe; „zawsze kłamią” oznacza, że każde wypowiedziane przez nich zdanie jest fałszywe.

8. Rectangles

How many rectangles of all sizes are there in a subdivided rectangular 9×8 grid with two squares removed from the top right?



Here squares count as rectangles and one $p \times q$ shape is counted as different from other $p \times q$ shapes. All three rectangles shown in the picture below are different.