© Hanna Kuik

Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

X edycja

finał dla szkół ponadpodstawowych

20 kwietnia 2023

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Pełnia

W Transylwanii żyją ludzie i wampiry (nie różniące się wyglądem od ludzi). Ludzie tamtejsi zawsze mówią prawdę, a wampiry zawsze kłamią. Ponadto część ludzi tam mieszkających cierpi na wilkołactwo, które sprawia, że w dniu pełni księżyca wyłącznie kłamią (w pozostałe dni mówią prawdę). Nazwijmy tych ludzi wilkołakami. Wyruszasz do Transylwanii w celu zbadania sprawy. Masz zaplanowane dwa spotkania z trójką mieszkańców: Edem, Jackiem i Basią. Wiesz, że jedno z nich jest wampirem, jedno wilkołakiem, a jedno zdrowym człowiekiem. Pierwsze spotkanie odbędzie się w czasie pierwszej kwadry księżyca, a drugie podczas pełni. W czasie każdego spotkania możesz zadać tylko jedno pytanie jednej osobie, niekoniecznie tej samej, a odpowiedzią na nie ma być „tak” lub „nie”. Jakie pytania zadasz i komu, żeby ustalić, kto z nich jest wilkołakiem?

2. Pchła

Matematyczna pchła siedzi na osi liczbowej w punkcie 0. Postanawia odwiedzić swoją przyjaciółkę biedronkę, która siedzi na osi w punkcie n ($n \in \mathbb{N}$). Pchła porusza się, skacząc po osi, przy czym jej dwa pierwsze skoki mają długość 1, a długość każdego następnego skoku jest sumą długości dwóch poprzednich skoków. Każdy skok może być wykonany w prawo albo w lewo. Czy pchła jest w stanie zawsze dotrzeć do biedronki w skończonej liczbie kroków (niezależnie od wielkości n)?

Przykład: Gdyby biedronka siedziała w punkcie $n = 11$, to pchła mogłaby wykonać następującą serię skoków: 1 w prawo, 1 w prawo, 2 w prawo, 3 w lewo, 5 w prawo, 8 w lewo, 13 w prawo, po czym znalazłaby się w punkcie $n = 11$.

3. Pasikoniki

Okrąg podzielono na 14 równych części. Na jednej z tych części siedzi 15 pasikoników. Co minutę pasikoniki wybierają spośród siebie pewne dwa siedzące na tej samej części okręgu i te wybrane przeskakują na części sąsiednie: jeden na lewo, drugi na prawo. Gdy dokładnie 7 części okręgu jest bez pasikoników, stworzenia kończą zabawę. Wyznaczcie najmniejszą jaką potraficie naturalną liczbę t o takiej własności: Pasikoniki mogą tak skakać, by zabawa skończyła się po co najwyżej t minutach. Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć (i uzasadnić), tym lepiej.

4. Kobiety

Seniorka Alicja ma trzy córki, a każda z nich ma po dwie córki. Wiemy jeszcze, że każda z sześciu wnuczek Alicji ma po jednej córce. Żeńska część rodziny Alicji składa się zatem z 16 kobiet. Na ile sposobów można wybrać niepusty podzbiór kobiet z tej rodziny tak, by nie znajdowała się w nim żadna kobieta wraz ze swą córką?

5. Sałatka z eukaliptusa II

Talia do dwuosobowej gry *Sałatka z eukaliptusa* składa się z 12 kart: 4 białe, 4 zielone i 4 żółte. Na początku gry karty są tasowane i rozkładane na 2 zestawy po 4 odkryte karty, pozostałe karty są odkładane i nie biorą udziału w grze. W trakcie gry kolejno:

(1) Pierwszy gracz wybiera jeden zestaw kart i kładzie przed sobą, niewybrany zestaw trafia do drugiego gracza.
(2) Drugi gracz decyduje, jaki kolor będzie najwyżej punktowany (za 3 punkty).
(3) Pierwszy gracz decyduje, jaki kolor jest najniżej punktowany (za 1 punkt, karta w trzecim kolorze będzie wtedy warta 2 punkty).
(4) Pierwszy gracz bierze do ręki dowolną kartę ze swojego zestawu.
(5) Drugi gracz bierze do ręki dowolną kartę ze swojego zestawu.
(6) Gracze wymieniają się swoimi (zmniejszonymi o jedną kartę) zestawami kart.

Punkty (4), (5) i (6) powtarzają się jeszcze dwa razy i gra się kończy. Ostatnia karta z obu zestawów nie trafia do nikogo. Wynik gracza jest wyliczany jedynie na podstawie najliczniej reprezentowanego koloru na jego ręce. Jeśli gracz ma dwie karty w tym kolorze, wartość ich koloru jest mnożona przez 10, jeśli trzy – przez 100. Na przykład: jeśli gracz ma dwie karty punktowane za trzy i jedną punktowaną za jeden, to jego wynikiem jest 30. W przypadku równej liczby kart w więcej niż jednym kolorze punktowany jest tylko jeden, najcenniejszy kolor. Wygrywa gracz, który ma więcej punktów. Przy równej liczbie punktów jest remis.

Wombat i koala grają w *Sałatkę z eukaliptusa*. Są doskonałymi graczami i nigdy nie popełniają błędów. Wombat zaczyna. Na stole leżą następujące stosy:

- 2 karty białe i 2 karty żółte
- 2 karty zielone, 1 karta biała i 1 karta żółta

Kto ma strategię wygrywającą?

6. Porządek w rzędzie

10 ludzi postanowiło stanąć w rzędzie, jeden za drugim, w dobrym porządku, to znaczy tak, by nikt nie widział przed sobą, patrząc dowolnie daleko, człowieka, który przewyższa go wzrostem o więcej niż 8 cm. Zakładamy, że wszyscy patrzą w jedną stronę, tzn. pierwsza osoba od lewej nie widzi nikogo, druga od lewej widzi tylko pierwszą, trzecia widzi pierwsze dwie itd. Nasi ludzie mają takie wzrosty (w centymetrach):

$$140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185.$$

Na ile sposobów mogą stanąć w dobrym porządku?

Na przykład dla pięciorga ludzi o wzrostach: 160, 165, 170, 175, 180, jednym z wielu dobrych porządków byłby ciąg: 160, 170, 165, 180, 175, natomiast ciągi 160, 175, 170, 165, 180 oraz 180, 175, 170, 165, 160 byłyby złymi porządkami.

7. Szachowniczka

Wombat ma szachownicę 3×3, której wiersze oznaczone są liczbami 1, 2, 3, a kolumny literami A, B, C. W danej chwili zwierzak może wybrać cztery pola o wspólnym rogu, tworzące szachownicę 2×2 i na każdym z nich położyć pionka, przy czym na jednym polu może znajdować się maksymalnie 13 pionków. Zabawę może przerwać w dowolnym momencie. Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń pionów na szachownicy, na końcu zabawy wombata?

8. Konstelacja

Magda zbudowała trójwymiarowy model konstelacji, w którym 72 metalowe kule imitują gwiazdy. Każde dwie kule połączone są prętem, który będzie pomalowany na jeden z trzech kolorów: czerwony, zielony, niebieski. Kolorowym trójkątem nazywać będziemy takie trzy kule, że pierwszą z drugą łączy czerwony pręt, drugą z trzecią – niebieski, a trzecią z pierwszą – zielony.

W każdym z poniższych zdań zastąpcie wielokropek przykładową liczbą tak, by zdanie było prawdziwe. Dokładnie uzasadnijcie, dlaczego zdanie jest prawdziwe.

(a) Można tak pomalować pręty, by było co najmniej ... kolorowych trójkątów.

(b) Nie można tak pomalować prętów, żeby było co najmniej ... kolorowych trójkątów.

Im wiekszą liczbę potraficie znaleźć (i uzasadnić) w (a), tym lepiej. Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć (i uzasadnić) w (b), tym lepiej.

9. Koalowa wyspa binarna II

Misie koala Antek i Bartek żyją na Wyspie Binarnej. Wiadomością na tej wyspie jest ciąg binarny długości 10. Mieszkańcy do przekazywania sobie wiadomości używają specjalnych pasków papieru, składających się z n kwadratów w jednym rzędzie, na których to paskach można wpisywać ciągi binarne długości n. Niestety papier na wyspie uległ uszkodzeniu – na każdym pasku został zapisany w sposób losowy jeden bit. Na przykład, gdyby $n = 6$, przykładowe paski mogłyby wyglądać tak:

			1		

lub

0					

Przed wysłaniem wiadomości nadawca widzi ten bit i uzupełnia wszystkie pozostałe (każdy kwadrat na pasku musi mieć wpisaną jedną cyfrę – 0 lub 1). Odbiorca nie wie, w którym miejscu ani jaki bit był wydrukowany na początku. Misie Antek i Bartek chciałyby opracować system, który pozwoli im wysyłać wiadomości między sobą w taki sposób, aby odbiorca zawsze mógł właściwie odczytać wiadomość, jaką wysłał mu nadawca, czyli poznał, jaki dziesięciobitowy ciąg chciał mu nadawca przekazać. Jaka jest najmniejsza wartość n, dla której misie są w stanie opracować system porozumiewania się? Opiszcie ten system, tzn. jak zakodować wiadomość na pasku i jak ją odkodować. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że mniej kwadratów nie wystarczy.

Nadawca nie może na pasku zrobić nic więcej, poza uzupełnieniem kwadratów bitami.

10. Gra na wielokącie II

Dane są wierzchołki (i tylko wierzchołki) 2023-kąta foremnego. Ruch w grze polega na narysowaniu odcinka łączącego dwa wierzchołki tego wielokąta. Odcinek nie może przecinać narysowanych już odcinków, ale może mieć z nimi wspólny koniec. Nie można też dwa razy narysować tego samego odcinka. Tygrys i lwiątko wykonują ruchy naprzemiennie, zaczyna tygrys. Ten, kto nie może wykonać ruchu, przegrywa. Tygrys i lwiątko są doskonałymi graczami i nigdy nie popełniają błędów. Kto wygra? Opiszcie strategię wygrywającą, czyli sposób gry gwarantujący zwycięstwo i uzasadnijcie, że rzeczywiście jest to strategia wygrywająca.