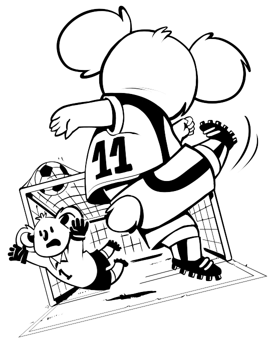


Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

XI edycja

II etap

Szkoły podstawowe NIE rozwiązują zadań 9 i 10.
Szkoły średnie NIE rozwiązują zadań 1 i 2.

2 lutego 2024

1. Każda drużyna rozwiązuje 8 zadań.
2. Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
3. Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
4. Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
5. **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
6. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
7. Czas pracy to 120 minut.

1. Cztery portfele

Grześ, Kasia, Magda i Rafał mają w swoich portfelach trochę złotych. Sumy tych kwot, z pominięciem każdej z nich po kolei, są równe odpowiednio: 27, 24, 22 i 20 złotych. Jaką kwotę ma w portfelu każda z osób?

2. Komu w drogę, temu czas

Paweł i Gaweł spieszą się na spotkanie. Spojrzeli jednocześnie na swoje zegarki i zaczęli się zastanawiać. Zegarek Pawła spóźnia się o 11 minut, ale Paweł sądzi, że jego zegarek spieszy się o 6 minut. Zegarek Gawła spieszy się o 6 minut, lecz Gaweł myśli, że jego zegarek spóźnia się o 11 minut. Paweł twierdzi, że teraz jest 13:00. Która godzina jest teraz według Gawła?

3. Magician II

63 cards, each with a different label, are in a pile on a table in some order.

1) A magician takes the top card and places it at the bottom of the pile.
2) He then takes the next card and lays it on the table to form the beginning of a row.
3) He then takes the next card and places it at the bottom of the pile.
4) He then takes the next card and places it at the right end of the row.
5) He repeats steps 3 and 4 until he has only one card in the pile.
6) Finally, he places the remaining card from the pile at the right end of the row.

We know that A is the last card in the final row. What was the position of A in the original pile (counting from the top)?

4. Wystawa liści eukaliptusa II

Koala i panda wybrały się na wystawę niezwykłych liści eukaliptusa. Na wystawie prezentowano 100 liści eukaliptusa, każdy w osobnej gablotce, oznaczonej innym numerem z zakresu od 1 do 100. Jeden z tych liści został ofiarowany muzeum przez pandę. Koala chce dowiedzieć się, który to liść i w tym celu może zadawać pandzie pytania, na które odpowiedziami są *tak* lub *nie*. Po każdym pytaniu koala słyszy odpowiedź i może zastanowić się, jakie kolejne pytanie zadać. Wiadomo, że panda czasem kłamie, więc kangurzyca – kuratorka wystawy – obiecała pilnować, by panda nie skłamała więcej niż raz. Niestety nie powie koali, czy i która odpowiedź jest fałszywa. Zakładamy ponadto, że koala świetnie sobie radzi z zagadkami, więc jeśli odpowiedzi na pytania jednoznacznie wskazują na liść pandy, to koala poda poprawnie jego numer. W każdym z poniższych zdań zastąpcie wielokropek przykładową liczbą tak, aby zdanie było prawdziwe. Dokładnie uzasadnijcie, dlaczego zdania są prawdziwe.

(a) Jeżeli koala będzie mogła zadać pandzie … pytań, to nie ma gwarancji, że poprawnie zgadnie numer liścia pandy.
(b) Jeżeli koala będzie mogła zadać pandzie … pytań, to na pewno poprawnie zgadnie numer liścia pandy.

Im większą liczbę potraficie znaleźć i uzasadnić w (a), tym lepiej. Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć i uzasadnić w (b), tym lepiej.

5. Kto okradł koalę?

Pociągiem z Zakopanego wraca do Poznania Koala Dyskretny. Kiedy pociąg zatrzymuje się, wszyscy wychodzą, a koala stwierdza, że z jego walizki zniknęły tajne zestawy zadań na konkurs. Kilka godzin później na komisariacie policjant Dingo przesłuchuje czwórkę wombatów, którzy dzielili przedział z koalą. Oto, co powiedzieli:

- Wombat Tasmański: Jestem niewinny. Koala częstował eukaliptusem Wombatkę Australię.
- Wombat Włochaty: Jestem niewinny. Wombatka Wiktoria jest winna.
- Wombatka Wiktoria: Jestem niewinna. Koalę okradły dwa lub trzy wombaty.
- Wombatka Australia: Jestem niewinna. Nie dostałam eukaliptusa od Koali Dyskretnego.

Policjant ma na komisariacie stary wariograf, dzięki któremu ustalił, że dokładnie 3 z powyższych zdań są prawdziwe, ale nie wie które. Wiadomo, że kradzieży nie dokonał nikt spoza przesłuchanej czwórki wombatów. Kto okradł koalę? Podajcie wszystkie możliwości.

6. Suma cyfr

Wyznaczcie przykładowy najdłuższy ciąg kolejnych liczb naturalnych o tej własności, że suma cyfr każdej z liczb w ciągu nie jest podzielna przez 5. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że dłuższy ciąg nie istnieje.

7. Gdzie jest kotek?

Kot Lizak i jego właścicielka Aga mieszkają naprzeciw szeregowca, w którym jest 7 domów, a każdy dom ma jeden balkon. Jest Sylwester, wszyscy mieszkańcy szeregowca są w domu, a kotek umówił się z Agą, że zagrają w grę „Gdzie jest kotek?”. Zasady gry są następujące. W pierwszej rundzie Lizak w tajemnicy przed Agą wskakuje na jakiś balkon w szeregowcu. Następnie Aga puka do jednego z domów w szeregowcu i pyta, czy na balkonie jest jej kotek. Zakładamy, że mieszkańcy domów są mili, zawsze otwierają drzwi i odpowiadają zgodnie z prawdą. W każdej kolejnej rundzie kotek przeskakuje o jeden balkon w prawo bądź o dwa balkony w lewo, ale nie może wyskoczyć poza szeregowiec (Aga wie o zasadach skakania), a Aga ponownie wybiera dom i pyta domownika, czy jest tam jej kotek. Gra kończy się wtedy, gdy Aga trafi do domu, na którego balkonie jest Lizak. Uznajemy wtedy, że kotek został złapany. Rozstrzygnijcie, czy Aga ma sposób gry, który gwarantuje złapanie kotka. Jeśli tak, to opiszcie strategię Agi i uzasadnijcie, że rzeczywiście na pewno po skończonej liczbie rund złapie Lizaka, nawet jeśli ten jest bardzo sprytny, bardzo nie chce być złapany, a szczęście mu sprzyja.

8. Punkty i proste

Znajdźcie zbiór 27 punktów płaszczyzny o tej własności, że różnych prostych zawierających przynajmniej trzy punkty z tego zbioru jest dokładnie 49. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu poprawności swojego przykładu.

Punkty częściowe można zdobyć, wskazując 27 punktów, dla których liczba opisanych prostych jest bliska 49. Im bliższa, tym lepiej.

9. Misiowa klasa II

W misiowej klasie jest 10 uczniów. Lista uczniów w dzienniku przedstawia się następująco:

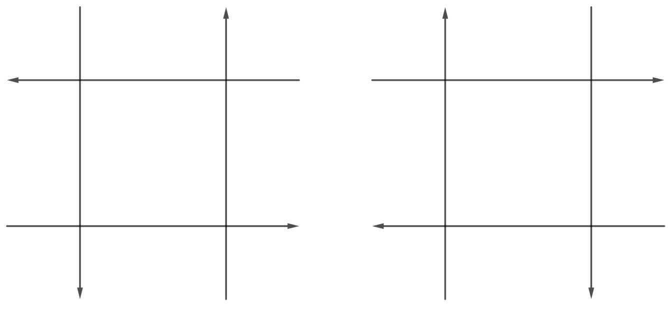
nr	uczeń
1	Miś Adaś
2	Miś Bartek
3	Miś Czarek
4	Miś Daria
5	Miś Emilia
6	Miś Filip
7	Miś Grześ
8	Miś Hela
9	Miś Ignaś
10	Miś Jagna

Grupa ta uczy się w klasie, w której znajduje się dokładnie 10 pieńków dla uczniów i są one ponumerowane od 1 do 10. W dniu rozpoczęcia roku szkolnego wychowawca klasy poprosił, aby każdy uczeń usiadł na pieńku, którego numer różni się od numeru tego ucznia w dzienniku o co najwyżej 2. Na ile różnych sposobów wszyscy uczniowie mogli zająć miejsca?

Przykładowo, Ignaś może usiąść na pieńku numer 7, 8, 9, 10, ale nie może usiąść na pieńku numer 6 czy 1. Należy przy tym pamiętać, że na każdym pieńku musi usiąść jakiś uczeń.

10. Wiry

Mamy szachownicę 6×6. Każdej kolumnie planszy przypisujemy strzałkę wskazującą w górę lub w dół, a każdemu wierszowi – strzałkę wskazującą w prawo lub w lewo. Taki układ 12 strzałek nazywamy zawirowanym, jeśli wśród nich istnieją dwie pionowe i dwie poziome strzałki, które tworzą zamknięty cykl, czyli jedną z konfiguracji z rysunku.



Ile jest zawirowanych układów strzałek na planszy 6×6?

Uwaga: Poziome bądź pionowe strzałki nie muszą sąsiadować ze sobą. Prostokąt znajdujący się w środku wiru (jak na rysunku) nie musi być kwadratem.

Zestawy zadań możecie zabrać do domu.