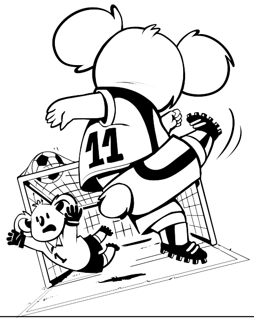


Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

XI edycja

finał dla szkół ponadpodstawowych

16 kwietnia 2024

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Wyspa Bambosi

Na Wyspie Bambosi żyją tylko Bamy i Bosie. Są to istoty rozumne, potrafiące mówić po polsku, a dla przyjezdnych wyglądają wszystkie tak samo. Wszyscy mieszkańcy wyspy się znają i wiedzą, kto z nich jest Bamem, a kto Bosiem. Bamy zawsze kłamią (tzn. każde wypowiedziane przez nie zdanie jest fałszywe), a Bosie zawsze mówią prawdę (każde wypowiedziane przez nie zdanie jest prawdziwe). Wylądowałeś na Wyspie Bambosi i spotkałeś trzech tubylców. Zapytałeś pierwszego z prawej: „Jesteś Bosiem czy Bamem”? Ten odpowiedział, ale tak niewyraźnie, że nie zrozumiałeś odpowiedzi. Zapytałeś zatem środkowego, co powiedział jego kolega. Odpowiedział: „Powiedział, że wśród nas jest tylko jeden Boś”. Wtedy idący z lewej wybuchnął: „Nie wierz środkowemu, on kłamie!”. Kim są środkowy i ten z lewej? Podajcie wszystkie możliwości.

2. Piłkarze

W szkole sportowej jest 106 uczniów. Każdy z nich otrzymał koszulkę sportową z identyfikującym go numerem, od 1 do 106. Ze względu na zbliżający się towarzyski mecz piłki nożnej z sąsiednią szkołą trener potrzebuje skompletować 16-osobową drużynę z uczniów tej szkoły – 11 zawodników i 5 rezerwowych. Ze względu na to, że ma to być mecz towarzyski, trener dobierze zawodników według nietypowej zasady: tak, by żadne dwa numery z koszulek nie różniły się o 6, 9, 12, 15, 18, ani 21. Wykażcie, że w drużynie znajdą się piłkarze z numerami różniącymi się o 3.

3. Trójkątna układanka

Wombat ma układankę, w której skład wchodzą następujące kawałki:

- dwa trójkąty o bokach długości $\sqrt{3}$, 3, $2\sqrt{3}$;
- trzy trójkąty o bokach długości 2, $2\sqrt{3}$, 4.

Pomóżcie mu ułożyć wszystkie możliwe trójkąty. Każdy kawałek musi być wykorzystany, żadne kawałki nie mogą nachodzić na siebie. Nie zapomnijcie wykazać, że niemożliwe jest ułożenie innych trójkątów.

4. Oszczędne kodowanie

Bolek zamierza wysłać do Lolka zakodowaną wiadomość. Wiadomość dostanie od Toli. Bolek wie jedynie, że wiadomość będzie składać się z 60 liter, wśród których jest 30 liter A, 15 liter K, 10 liter T i 5 liter E. Zamiast każdej litery w zakodowanej wiadomości musi wystąpić kod (ciąg) binarny, wybrany przez Bolka. Ciągi odpowiadające poszczególnym literom nie muszą być równej długości. Wiadomość zakodowana będzie ciągiem binarnym, bez spacji, o czym Bolek i Lolek wiedzą. Bolek przed wysłaniem wiadomości przekaże Lolkowi, że wiadomość może zawierać tylko litery A, K, T, E oraz poda ciąg binarny odpowiadający każdej z liter. Lolek nie wie, ile liter będzie we wiadomości ani ile razy wystąpi dana litera. Celem Bolka jest tak dobrać kody dla liter, by zakodowana wiadomość była jak najkrótsza, a jednocześnie by dla dowolnej wiadomości wymyślonej przez Tolę Lolek nie miał wątpliwości, jaka jest jej treść. Jakich kodów poradzilibyście Bolkowi używać? Im oszczędniejsze kodowanie wymyślicie, tym lepiej.

Przykładem niepoprawnego wyboru kodów dla liter jest przypisanie 0 literze E oraz 00 literze T, bo gdyby Bolek wysłał Lolkowi wiadomość zaczynającą się od np. 000, wtedy Bolek nie wiedziałby, czy początkiem wiadomości było EEE, czy TE, czy może jeszcze coś innego.

5. Przeciąganie liny

Na powiatowe eliminacje do Mistrzostw w Przeciąganiu Liny zgłosiło się 20 kandydatów. Komisja chce zorganizować turniej wyłaniający jednego reprezentanta powiatu. Wszystko im jedno, kogo wyślą na mistrzostwa, byle nie wysłać najsłabszego zawodnika. Komisja wie, że każdy zawodnik ma inną siłę, ale nie wie, jaką siłą dysponują poszczególni kandydaci. W każdej rundzie turnieju komisja dzieli kandydatów na dwie 10-osobowe drużyny. Zakładamy, że wynik rundy przeciągania liny zależy tylko od sumarycznej siły drużyn: rundę wygrywa drużyna, której sumaryczna siła jest większa; może też być remis, jeśli siły się równoważą. W kolejnej rundzie komisja może zmieniać składy drużyn, ale zawsze drużyny muszą liczyć po 10 osób. Plan całych zawodów (tzn. składy drużyn we wszystkich rundach) musi być opublikowany przed rozpoczęciem turnieju. Jak przeprowadzić zawody 10-rundowe tak, by na pewno nie wysłać najsłabszego zawodnika jako reprezentanta powiatu?

6. Gdzie jest kotek II

Kot Lizak i jego właścicielka Aga mieszkają naprzeciw szeregowca, w którym jest 7 domów, a każdy dom ma jeden balkon. Jest Sylwester, wszyscy mieszkańcy szeregowca są w domu, a kotek umówił się z Agą, że zagrają w grę „Gdzie jest kotek?”. Zasady gry są następujące. W pierwszej rundzie Lizak, w tajemnicy przed Agą, wskakuje na jakiś balkon w szeregowcu. Następnie Aga puka do jednego z domów w szeregowcu i pyta, czy na balkonie jest jej kotek. Zakładamy, że mieszkańcy domów są mili, zawsze otwierają drzwi i odpowiadają zgodnie z prawdą. W każdej kolejnej rundzie Aga wychodzi na drogę, w tym czasie kotek przeskakuje o jeden balkon w prawo bądź o dwa balkony w lewo (ale nie może wyskoczyć poza szeregowiec), a Aga ponownie wybiera dom i pyta domownika, czy jest tam jej kotek. Aga zna zasady skakania. Gra kończy się wtedy, gdy Aga trafi do domu, na którego balkonie jest Lizak. Uznajemy wtedy, że kotek został złapany. Uzasadnijcie, że Aga **nie ma** sposobu gry, który gwarantuje złapanie kotka w czasie pierwszych pięciu rund.

7. Węże z domina

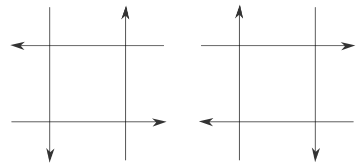
Tradycyjny komplet domina składa się z 28 prostokątnych, jednakowych wymiarów klocków o dwóch polach każdy, z pewną liczbą kropek na każdym polu. W komplecie tym każda para (niekoniecznie różnych) liczb oczek ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ występuje dokładnie raz. Załóżmy, że mamy analogiczny do tradycyjnego komplet domina, ale największą liczbą oczek na kostkach jest 9. Innymi słowy, liczby oczek na polach pochodzą ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$ i zachowana jest zasada, że każda para liczb występuje dokładnie raz. Budujemy węże (ciągi) z kostek tego domina tak, by klocki do siebie pasowały, to znaczy każde dwa kolejne stykały się bokami pól zawierających tę samą liczbę oczek. Chcemy przy tym użyć wszystkich kostek domina. Wyznaczcie najmniejszą liczbę węży, jaka pozwoli osiągnąć cel. Opiszcie przykładową konstrukcję węży i nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że mniej węży być nie może.

Na poniższym rysunku liczby w polach oznaczają liczby oczek. Wąż z lewej jest prawidłowo ułożony z trzech klocków. Po prawej ułożenie nie jest prawidłowe, bo pierwszy i drugi klocek nie pasują do siebie.

Uwaga: Węże nie mają cykli ani rozgałęzień.

8. Liczba wirów

Mamy szachownicę 6×6. Każdej kolumnie planszy przypisujemy strzałkę wskazującą w górę lub w dół, a każdemu wierszowi – strzałkę wskazującą w prawo lub w lewo. Wirem nazywamy układ dwóch pionowych i dwóch poziomych strzałek, które tworzą zamknięty cykl, czyli jedną z konfiguracji z rysunku.



Czy istnieje takie przypisanie strzałek, że tworzą one dokładnie 72 wiry?

Uwaga: Poziome bądź pionowe strzałki nie muszą sąsiadować ze sobą. Prostokąt znajdujący się w środku wiru nie musi być kwadratem (jak to jest na rysunku).

9. Dwanaście koali

W sekretnym pawilonie poznańskiego zoo przy okrągłym stole zbiera się 12 koali i 12 małp. Koale i małpy zajmują miejsca na przemian (tak, że żadne nie siedzi obok przedstawiciela swojego gatunku). Każde ze zwierząt ma w łapach tabliczkę wraz z markerem i ścierką. Początkowo na tabliczce dokładnie jednego z koali jest zapisana liczba 1, na tabliczce dokładnie jednego innego koali liczba -1, a na pozostałych tabliczkach zera. Gdy wybije pełna godzina, wszystkie koale mówią siedzącym obok nich małpom liczby ze swoich tabliczek, po czym je ścierają. Każda z małp sumuje usłyszane liczby i wynik zapisuje na swojej tabliczce. Pół godziny później to małpy mówią siedzącym obok nich koalom liczby ze swoich tabliczek, a koale zapisują sumy. Zwierzęta powtarzają te czynności w ciągu każdej kolejnej godziny. Skończą swoją zabawę dopiero, gdy na którejś z tabliczek pojawi się liczba **większa niż** 222024. Czy, niezależnie od początkowego usadzenia zwierząt, zawsze nastąpi to w skończonym czasie?

10. Szczęśliwe pary

Parę liczb naturanych (m, n) nazywamy szczęśliwą, jeśli $1 \leqslant m \leqslant n$ i suma wszystkich liczb naturalnych od m do n włącznie jest równa iloczynowi liczb m i n. Dobra wróżka podała cztery kolejne szczęśliwe pary (m, n) o najmniejszych wartościach m:

$$(1, 1),\ (3, 6),\ (15, 35),\ (85, 204).$$

W poniższej tabelce widzimy obliczenia wróżki.

m	n	$m+(m+1)+\ldots+(n-1)+n$	$m \cdot n$
1	1	1	1
3	6	$3+4+5+6=18$	$3 \cdot 6 = 18$
15	35	$15+16+\ldots+35=525$	$15 \cdot 35 = 525$
85	204	$85+86+\ldots+204=17340$	$85 \cdot 204 = 17340$

(a) Uzasadnijcie, że $n \geqslant 2m-1$ dla każdej szczęśliwej pary (m, n).

(b) Znajdźcie szczęśliwą parę inną niż te od wróżki. Wskazówka: Poszukajcie zależności między parami w tabelce.