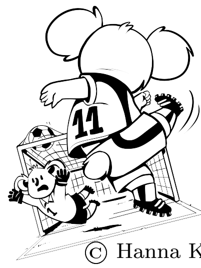
KOALA 2024
MECZ
WIELKOPOLSKA – DOLNY ŚLĄSK



Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min. Czas na zadawanie pytań: 15 min.

1. Wikipedia

W Wikipedii hasła zawierają odnośniki do innych haseł. Tu rozważamy tylko odnośniki znajdujące się w następujących hasłach:

- hasło „Algorytmika" zawiera odnośniki do haseł: Informatyka, Struktura danych;
- „Australia": Europa, Grecy, Język angielski;
- „Człowiek rozumny": Europa, Ssaki;
- „Europa": Człowiek rozumny, Grecja, Język angielski, Ssaki;
- „Filozofia": Logika;
- „Grecja": Europa, Filozofia, Nauka;
- „Grecy": Australia, Grecja;
- „Informatyka": Algorytmika, Język angielski, Matematyka, Struktura danych, Teoria grafów;
- „Język angielski": Australia, Europa;
- „Kangur olbrzymi": Australia, Ssaki, Torbacze;
- „Koala": Australia, Ssaki, Torbacze;
- „Kombinatoryka": Logika matematyczna, Matematyka, Teoria grafów;
- „Logika": Filozofia, Logika matematyczna;
- „Logika matematyczna": Kombinatoryka, Logika, Matematyka, Teoria grafów;
- „Matematyka": Algorytmika, Informatyka, Kombinatoryka, Logika matematyczna;
- „Nauka": Filozofia, Logika;
- „Ssaki": Kangur olbrzymi, Torbacze, Człowiek rozumny;
- „Struktura danych": Algorytmika, Język angielski;
- „Torbacze": Kangur olbrzymi, Ssaki, Australia;
- „Teoria grafów": Matematyka, Informatyka, Logika matematyczna, Kombinatoryka;

Jak można najszybciej (w sensie liczby kliknięć) dojść od hasła „Koala" do hasła „Kombinatoryka", wykonując tylko kliknięcia w odnośniki?

2. Punkty kratowe

Punktem kratowym nazywamy punkt na płaszczyźnie, który ma obie współrzędne całkowite. Znajdź najmniejszą liczbę n o tej własności, że dla dowolnych n różnych punktów kratowych pomalowanych na zielono istnieją takie dwa zielone punkty, że odcinek o końcach w tych punktach zawiera co najmniej dwa inne (niekoniecznie zielone) punkty kratowe.

3. Gra na 66-kącie

Adaś i Ewa grają w grę na pewnym 66-kącie foremnym: na zmianę przypisują dowolną liczbę rzeczywistą do dowolnego wierzchołka tego 66-kąta, któremu jeszcze nic nie zostało przypisane. Grę rozpoczyna Adam. Adam wygrywa grę wtedy, gdy suma liczb przypisanych do pewnych trzech wierzchołków tego 66-kąta, które stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego, wynosi 0; w przeciwnym przypadku wygrywa Ewa. Kto ma strategię wygrywającą w tej grze i jak powinien grać?

Przez strategię wygrywającą rozumiemy taki sposób gry, który gwarantuje wygraną, nawet z doskonale grającym przeciwnikiem.

4. Ciekawe ciągi

Dla każdej liczby naturalnej tworzymy nieskończony ciąg, którego pierwszym wyrazem jest ta liczba, a każdy następny jest sumą kwadratów cyfr wyrazu poprzedniego. Takie ciągi nazwijmy ciekawymi. Przykładowo, ciekawy ciąg zaczynający się od 7 ma takich pięć następnych wyrazów: 49, 97, 130, 10, 1. Udowodnijcie, że istnieje ciekawy ciąg zaczynający się liczbą trzycyfrową, w których żaden wyraz nie wynosi 1, ale takich ciągów jest mniej niż 888.

5. Szyfrowanie

Zosia napisała program szyfrujący, zamieniający dowolny ciąg złożony z polskich liter na inny taki ciąg. Romek ma program deszyfrujący, który dowolny ciąg utworzony przez program Zosi zamieni z powrotem na ciąg oryginalny. Udowodnij, że jeśli program Zosi zamieni jakiś ciąg na krótszy, to istnieje też taki ciąg, który program zamieni na dłuższy.

6. Hazardzista

Panda ma talię kart, w której jest 6 kart czerwonych i 4 karty niebieskie. Panda proponuje koali następującą grę: najpierw potasuje tę talię kart, a potem będzie odsłaniać kolejno karty. Koala przed rozpoczęciem odsłaniania kart musi podać, jakie kolory będą miały wszystkie kolejno odsłaniane karty, tzn. musi podać ciąg 10 kolorów kart, przy czym każdy z kolorów może pojawić się w ciągu dowolną liczbę razy. Ponadto przed każdą odsłanianą kartą koala musi postawić pewną kwotę na tę kartę – jeśli poprawnie odgadnie kolor tej karty, to wygrywa postawioną kwotę, a jeśli nie, to kwotę tę przegrywa. Koala postanowiła, że obstawi dla wszystkich kart kolor czerwony i postawi na kolor pierwszej karty 512 zł. Kolejne obstawiane kwoty będą wyznaczane w następujący sposób: jeśli koala zgadła poprawnie kolor poprzedniej karty, to aktualnie obstawiana kwota będzie dwa razy mniejsza od poprzedniej, a jeśli koala nie zgadła poprawnie koloru poprzedniej karty, to aktualnie obstawiana kwota będzie półtora raza większa od poprzedniej. Interesuje nas zysk koali na koniec gry, tzn. różnica pomiędzy sumą wszystkich kwot wygranych przez koalę i sumą wszystkich kwot przez nią przegranych. Ile ten zysk może wynosić? Podajcie wszystkie możliwości i uzasadnijcie, że innych możliwości nie ma.

Przykład: Załóżmy, że w potasowanej talii pierwsze cztery karty to kolejno karta czerwona, karta niebieska, karta niebieska, karta czerwona. Wówczas koala kolejno: wygrywa 512 zł, przegrywa $0{,}5 \cdot 512 = 256$ zł, przegrywa $1{,}5 \cdot 256 = 384$ zł i wygrywa $1{,}5 \cdot 384 = 576$ zł. Zatem zysk koali po pierwszych czterech kartach to $512 + 576 - 256 - 384 = 448$ zł.

7. Klocki

Klasa VIa bawi się dziesięcioma klockami o wysokościach: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 cm, ustawiając je po jednym w każdym wierzchołku 10-kąta foremnego i za każdym razem obliczając sumę dodatnich różnic wysokości każdych dwóch sąsiednich.

Na przykład jeśli na wierzchołkach stoją kolejno klocki o wysokościach: $11, 13, 15, 5, 7, 9, 19, 17, 3, 1$ cm, to suma taka wynosi (w centymetrach)

$$(13-11)+(15-13)+(15-5)+(7-5)+(9-7)+(19-9)+$$
$$+(19-17)+(17-3)+(3-1)+(11-1)=56.$$

Na ile sposobów mogą ustawić te klocki tak, by otrzymana suma była najmniejsza z możliwych?

Zakładamy, że wierzchołki wielokąta są ponumerowane, więc ważne jest, w którym wierzchołku stoi dany klocek.

8. Sznur

Ali i Baba odziedziczyli sznur, na który nanizanych jest 10 diamentów i 10 szmaragdów. Jeszcze go nie widzieli, więc nie wiedzą, w jakiej kolejności nanizane są kamienie. Muszą jednak przed okazaniem im sznura wybrać taką liczbę c, by mieć pewność, że gdy dostaną sznur, będą mogli przeciąć go w co najwyżej c miejscach tak, by po rozdzieleniu między siebie otrzymanych kawałków każdemu przypadło po 5 diamentów i 5 szmaragdów.

Jeśli na przykład podaliby liczbę 3, a kamienie nanizane byłyby w kolejności: DSDSDSSSDDDDSSSDDSDS, to mogliby sznur rozciąć tak:

DSD|SDSSSDDDDS|SSDDSDS.

Ali wziąłby środkowy fragment, a Baba – pozostałe dwa. Wykonali przy tym tylko dwa cięcia, co jest dozwolone – nie muszą wykorzystać trzech cięć.

Jednak aby dostać sznur, Ali i Baba muszą wybrać najmniejszą liczbę c, która gwarantuje istnienie opisanego podziału sznura, niezależnie od kolejności kamieni. Jaką liczbę powinni wybrać?

9. Szkielet

Dane są odcinki o długościach $1, 2, \ldots, 199$. Rozstrzygnijcie, czy z wszystkich tych odcinków można zbudować szkielet prostopadłościanu. Nic nie może wystawać, odcinki mogą mieć wspólne tylko końce.

Zakładamy, że szkielet prostopadłościanu tworzą wszystkie jego krawędzie.

10. Szachownica

Mamy szachownicę 2020×2020. W każde jej pole wpisujemy inną liczbę naturalną, wybierając spośród liczb: $1, 2, \ldots, 4080400$. Czy można to zrobić w taki sposób, by suma liczb w każdym wierszu (z wyjątkiem pierwszego) była większa o 1 od sumy w wierszu poprzednim?