



© Hanna Kuik

KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

XII EDYCJA

II etap

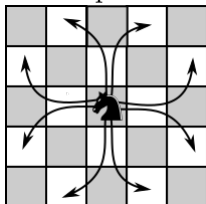
szkoły ponadpodstawowe

21 LUTEGO 2025

1. Każda drużyna rozwiązuje 8 zadań.
2. Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
3. Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
4. Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
5. **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
6. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
7. Czas pracy to 120 minut.

1. Knight

A knight is placed on the infinite board and can only move in the following way: in each move it can either go two squares vertically and the one square right or left, or it can go two squares horizontally and then one square up or down. The picture below shows the possible moves of a knight.



We assume that the knight can only move to the square that it hasn't visited yet. Complete each of the sentences below by writing a natural number in the space indicated so that the sentence is true. Justify why the sentences are true.

- (a) The knight after ... moves cannot reach a square from which it cannot move any longer (i.e. it cannot move to the square that he hasn't visited yet).
- (b) The knight after ... moves can reach a square from which it cannot move any longer (i.e. it cannot move to the square that he hasn't visited yet).

The larger number you can find and justify in (a), the better. The smaller number you can find and justify in (b), the better.

Remark: We assume that a square is visited if it is the final square of the knight's move. So each move generates only one new visited square.

2. Kto gdzie mieszka?

Koale żyją w Australii. Ich preferowanym środowiskiem są lasy złożone z drzew eukaliptusowych. Wzdłuż wybrzeża Queensland jest siedlisko, w którym żyją tylko cztery koale: Adam, Bartek, Czarek i Dawid. Jeden z nich mieszka na drzewie eukaliptusa czerwonego, drugi na eukaliptusie królewskim, trzeci na eukaliptusie gunna, a czwarty na eukaliptusie robusta. Na podstawie poniższych informacji określcie, który koala mieszka na jakim drzewie:

- Eukaliptus gunna zamieszkuje Adam albo Bartek.
- Nocami Bartek szuka pożywienia razem z koalą z eukaliptusa gunna.
- Bartek unika spotkania z mieszkańcem eukaliptusa czerwonego.
- Czarek często obserwuje koale żyjące na eukaliptusie robusta i eukaliptusie czerwonym.

3. Znajdź liczbę

Podajcie liczbę, która spełnia poniższe warunki.

- Jest całkowita, dodatnia i ma osiem cyfr.
- Wszystkie jej cyfry parzyste tworzą jeden blok, to znaczy pomiędzy żadnymi dwiema cyframi parzystymi nie ma żadnej nieparzystej.
- Spośród czterech ostatnich cyfr, jedna jest sumą trzech pozostałych.
- Każda z pierwszych czterech cyfr jest kwadratem liczby całkowitej, a ich suma również jest kwadratem liczby całkowitej.
- Spośród sześciu ostatnich cyfr, dokładnie jedna nie jest całkowitą potęgą dwójki.
- Cztery ostatnie cyfry tworzą ciąg malejący.
- Cyfra, która występuje w niej najczęściej, pojawia się dokładnie trzy razy.

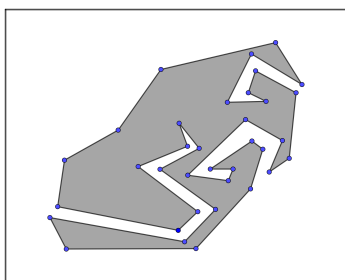
Uwaga: W ciągu malejącym kolejne elementy nie mogą być równe.

4. Strażnicy zamku

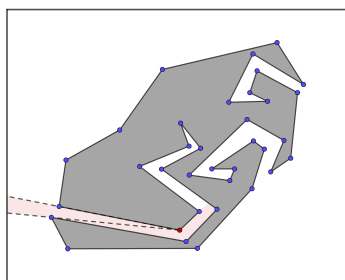
Na poniższym rysunku przedstawiono zamek króla Wombata Pierwszego Nieobliczalnego. Król chce umieścić na murach strażników, aby go strzegli. Strażników możemy umieszczać na murze w miejscach, które na rysunku oznaczone są kropkami. Chcemy umieścić strażników w taki sposób, aby widzieli całą przestrzeń na zewnątrz zamku, która jest zawarta w czarnym prostokącie. W każdym z poniższych zdań zastąpcie wielokropki przykładową liczbą tak, aby zdanie było prawdziwe. Dokładnie uzasadnijcie, dlaczego zdania są prawdziwe.

- (a) Jeżeli król Wombat Pierwszy Nieobliczalny będzie miał do dyspozycji ... strażników, to nie może ich rozmieścić tak, aby widzieli całą przestrzeń na zewnątrz zamku.
- (b) Jeżeli król Wombat Pierwszy Nieobliczalny będzie miał do dyspozycji ... strażników, to może ich rozmieścić tak, aby widzieli całą przestrzeń na zewnątrz zamku.

Im większą liczbę potraficie znaleźć i uzasadnić w (a), tym lepiej. Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć i uzasadnić w (b), tym lepiej.



Uwaga! Na poniższym rysunku wybrano jedno z miejsc i zaciemniono teren na zewnątrz zamku, jaki widzi strażnik umieszczony w tym miejscu.



5. Gra tablicowa

Na tablicy napisano ciąg n -elementowy, złożony z samych dwójek. Jaś i Małgosia grają w taką grę: gracze wykonują ruchy na zmianę, a ruch polega albo na zastąpieniu jakiegoś niezerowego wyrazu ciągu zerem, albo na odjęciu 1 od każdej liczby z pewnego niepustego podzbioru niezerowych wyrazów ciągu na tablicy. Gra kończy się, gdy ciąg na tablicy składa się z samych zer. Wygrywa gracz, który wykona ruch jako ostatni. Małgosia jest pierwszym graczem. Zakładamy, że zarówno Małgosia, jak i Jaś są doskonałymi graczami i nigdy nie popełniają błędów. Kto wygra tę grę, jeśli:

- (a) $n = 4$?
- (b) $n = 2024$?

6. Kafelki

Układamy na podłodze wzór z kafelków o wymiarach 2×1 , przestrzegając następujących reguł:

- (a) wszystkie kafelki układamy poziomo,
- (b) kafelki w pierwszym rzędzie tworzą ciągłą linię tzn. nie ma pomiędzy nimi "dziur",
- (c) każdy kafelek z rzędu innego niż pierwszy jest ułożony w taki sposób, że jego środek jest ustawiony bezpośrednio nad lewym lub prawym końcem przynajmniej jednego klocka z poprzedniego rzędu.

Ustalcie, ile różnych wzorów możemy ułożyć, jeśli mamy do dyspozycji

- a) 4 kafelki;
- b) 6 kafelków.

Przykład: Na poniższych rysunkach znajdziecie przykłady wzorów z 5 kafelków. Rysunki z pierwszego wiersza nie spełniają reguł podanych w zadaniu, a w wierszu drugim przedstawiono rysunki trzech różnych, poprawnych wzorów.



7. Wyrównywanie liczb II

Macie dwie różne liczby naturalne: lewą i prawą. W każdym ruchu możecie wybrać dodatnią liczbę naturalną n i jedną z liczb pomnożyć przez n , a do drugiej liczby dodać n . Waszym celem jest sprawić, by po pewnej liczbie ruchów lewa liczba była równa prawej. Pokażcie, że jeśli mniejsza z liczb jest na początku równa 2025, to można te liczby wyrównać w nie więcej niż 2024 ruchach.

8. Koalowe oczko

Talia do gry w koalowe oczko składa się z 7 kart: sześciu kart liści eukaliptusa oznaczonych liczbami od 1 do 6 oraz jednej karty diabła tasmańskiego. Podczas rozgrywki gracz odsłania kolejne karty z potasowanej talii. Rozgrywka kończy się w momencie, w którym gracz spasuje (wówczas jego wynik to suma liczb na kartach liści eukaliptusa) lub gdy odsłoni kartę diabła tasmańskiego (wówczas kończy z zerowym wynikiem). Krupier stosuje w tej grze następującą strategię: dobiera karty do momentu, w którym jego wynik osiągnie 7 punktów lub więcej i wtedy pasuje. Dobrym układem kart w potasowanej talii nazywamy takie ich ułożenie, które pozwala krupierowi osiągnąć niezerowy wynik. Ile jest różnych dobrych układów kart talii?

Zestawy zadań możecie zabrać do domu.