



KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

XII EDYCJA

finał dla szkół ponadpodstawowych

13 MAJA 2025

© Hanna Kuik

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem.** Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Sumy Fibonacciego

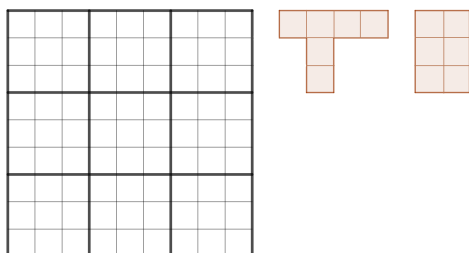
Liczby Fibonacciego są zdefiniowane w następujący sposób:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{i} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n > 2.$$

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą N tak, aby suma dowolnych N kolejnych liczb Fibonacciego była podzielna przez 3.

2. Gra w stemple II

W grze w stemple gracz na kwadratowej planszy 9×9 podzielonej na kwadraty 3×3 (patrz rysunek) odciska po kolei wybrane przez siebie pieczątki przedstawione na rysunku (widać kształt, jaki pieczętka zostawia na planszy). Pieczętkę można postawić tylko na samych niezamalowanych wcześniej polach i cała pieczętka musi mieścić się na planszy, każdej pieczętce można użyć dowolnie wiele razy. Pieczątki można obracać. W momencie wypełnienia któregoś z obszarów — wiersza, kolumny lub jednego z 9 kwadratów zaznaczonych na rysunku — gra się kończy, a wynik gracza stanowi liczba jednocześnie wypełnionych obszarów. Jaki najwyższy wynik można uzyskać w tej grze?

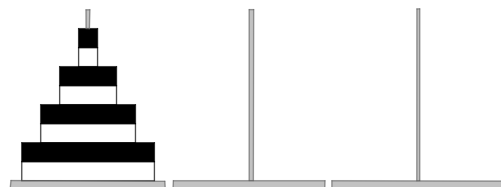


3. Sigmy i delulu

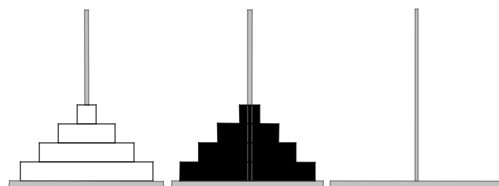
Na pewnej platformie społecznościowej dyskusje prowadzą wyłącznie sigmy, którzy zawsze mówią prawdę i delulu, którzy zawsze kłamią. Do czatu z dwoma użytkownikami tej platformy dołącza Logik. Logik pyta jednego z nich: „Czy któryś z was jest sigmą?”. Ten odpowiada i Logik natychmiast stwierdza, jaka jest prawdziwa odpowiedź na jego pytanie. Kim jest użytkownik zapytany przez Logika, a kim jego znajomy?

4. Czarno-białe wieże

Koalątko ma osiem krążków z dziurką w środku: cztery białe o promieniach 1, 2, 3 i 4 oraz cztery czarne również o promieniach 1, 2, 3 i 4. Koalątko ma też do dyspozycji trzy paliki, na których może układać krążki. Na początku krążki ułożone są na paliku pierwszym kolorami na przemian tak, jak jest to pokazane na poniższym rysunku:



Koalątko chciałoby poprzekładać krążki tak, aby utworzyły one dwie jednokolorowe wieże (białą na pierwszym, a czarną na drugim paliku) zgodnie z poniższym rysunkiem:



Koalątko może przekładać krążki między palikami zgodnie z następującymi zasadami:

- W każdym ruchu koalątko może przełożyć tylko jeden krążek z jednego palika na inny.
- Nigdy nie można położyć większego krążka na mniejszy krążek (ale można położyć jeden na drugim dwa krążki o tych samych rozmiarach).
- Koalątko zawsze przekłada krążek ze szczytu jednego palika na szczyt innego palika.

Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, która pozwoli koalątku ułożyć dwie jednokolorowe wieże? Opiszcie, jak koalątko może to zrobić.

5. Kolorowy ostrosłup

Wszystkie krawędzie boczne i wszystkie przekątne podstawy pewnego ostrosłupa dziewięciokątnego pomalowano na biało albo czarno. Udowodnij, że pewne trzy wierzchołki tego ostrosłupa wyznaczają trójkąt o bokach jednego koloru.

6. Kolorowanie kraty

Punktem kratowym nazywamy punkt na płaszczyźnie, którego obie współrzędne są całkowite. Chcemy pokolorować wszystkie punkty kratowe na płaszczyźnie w taki sposób, aby:

- dla każdej pary liczb całkowitych x, y każdy z punktów (x, y) , $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ miał inny kolor,
- dla każdej pary liczb całkowitych x, y każdy z punktów (x, y) , $(x+2025, y)$, $(x, y+2025)$, $(x+2025, y+2025)$ miał ten sam kolor.

Znajdźcie takie kolorowanie punktów kratowych na płaszczyźnie, aby były spełnione obie powyższe własności, które używa najmniejszej możliwej liczby kolorów. Uzasadnijcie, że to kolorowanie jest poprawne i że nie można użyć mniejszej liczby kolorów.

7. Kafelki II

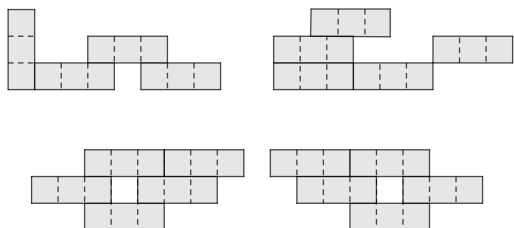
Układamy na podłodze wzór z kafelków o wymiarach 3×1 , przestrzegając następujących reguł:

- (1) Wszystkie kafelki układamy poziomo.
- (2) Kafelki w pierwszym rzędzie tworzą ciągłą linię tzn. nie ma pomiędzy nimi "dziur".
- (3) Każdy kafelek z rzędu innego niż pierwszy jest ułożony w taki sposób, że ma on wspólny brzeg o dodatniej długości z przynajmniej jednym kafelkiem z poprzedniego rzędu.
- (4) Jeśli rozpatrzmy dowolne dwa kafelki z sąsiednich rzędów, to długość ich wspólnego brzegu musi być jedną z liczb ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Ustalcie, ile różnych wzorów możemy ułożyć, jeśli mamy do dyspozycji

- a) 4 kafelki;
- b) 5 kafelków.

Przykład: Na poniższych rysunkach znajdziecie przykłady wzorów. Rysunki z pierwszego wiersza nie spełniają reguł podanych w zadaniu (na lewym złamano reguły nr 1 i 2, a na prawym reguły nr 3 i dwukrotnie 4), a w wierszu drugim przedstawiono rysunki dwóch różnych, poprawnych wzorów. Na rysunkach przerywanymi liniami zaznaczono podział kafelków na kwadraty o boku 1.



8. Ciekawe ciągi

Znajdź wszystkie ciągi składające się z dwóch lub więcej kolejnych liczb naturalnych, których suma wyrazów jest równa 2024.

9. 12 zapalek

Użyj 12 zapalek długości 1 do skonstruowania wielokąta wypukłego o polu 4. Trzeba wykorzystać wszystkie zapalki i cała długość każdej z zapalek ma należeć do obwodu wielokąta. Zapalek nie wolno łamać.

10. Szyfrogram Jasia Fasoli

Jaś Fasola wypisał litery od A do I (9 liter), a każdej z nich przypisał dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 9\}$. Mogło się zdarzyć, że jakaś liczba została przypisana różnym literom. Stworzył w ten sposób szyfrogram i użył do zakodowania ciągu 20 wyrazów: W każdym wyrazie każdą literę zastąpił jedną z przypisanych jej liczb. Ku wielkiej radości Jasia udało mu się to zrobić tak, że każda z 20 liczb, jakie powstały, miała cyfry ustawione w porządku rosnącym, w dodatku rosnącym zawsze o 1. Poniżej podajemy wszystkie 20 wyrazów, które Jaś zaszyfrował. Wyznacz wszystkie szyfrogramy, dzięki którym opisany wynik szyfrowania był możliwy.

EDHFHI
CBEDHG
EEBGH
FEBF
EDBFDG
ACBFEB
EEHGDG
ACIFEHG
CIFE
BFDH
FDBFHI
IEDHA
CEHG
FEBGH
CBEEBF
CIFD
EEB
ED
FEBG
CIEEH

Przykładowo, jeśli fragment szyfrogramu Jasia wyglądałby tak: A 3,4 ; B 2,3 ; C 1,2; a do zaszyfrowania byłby wyraz CBA, to po zaszyfrowaniu u Jasia mogła powstać liczba 123 lub 234. Liczba 134 byłaby wykluczona, bo cyfry nie rosną o 1, zaś liczba 133 (i jeszcze 4 inne) wprowadziłaby wyrazowi CBA, ale jej cyfry nie tworzą ciągu rosnącego.