

Zad. 4. Słownik

W pewnym języku występują tylko spółgłoski J, K, L, M i samogłoski A, E, O. Wszystkie słowa w oficjalnym słowniku tego języka są pięcioliterowe i składają się z dwóch różnych spółgłosek i trzech samogłosek (samogłoski mogą się powtarzać). Każde słowo spełniające te warunki występuje w słowniku i są one tam wypisane w kolejności alfabetycznej.

Na którym miejscu w słowniku tego języka znajduje się słowo KOALA?

Zad. 5. Patrole

Inspektor Gołąbo przydziela aspirantom o kryptonimach Euklides, Cezar, Fibonacci, Łukasiewicz i Dijkstra patrole na ulicach Kombinatorycznej, Algorytmicznej i Logicznej.

Na ile sposobów może to zrobić, jeśli na każdej z ulic ma być jeden patrol i każdy aspirant ma być przydzielony do jakiegoś patrolu?

Zad. 6. Kostki i karty

Koala dwukrotnie rzuca sześcienną kostką do gry. Zrobił tabelkę: w pierwszym wierszu wypisał od największej do najmniejszej wszystkie sumy oczek, jakie można w takim eksperymencie otrzymać, a w drugim wierszu pod każdą sumą wpisał, na ile sposobów można ją uzyskać, przy założeniu, że **kolejność składników w sumie oczek jest istotna**.

Wombat robi inny eksperyment. Ma 9 różnych kart, a na każdej z nich wydrukowana jest jedna dodatnia liczba, będąca całkowitą wielokrotnością ułamka $\frac{1}{2}$. Liczby na kartach nie muszą być wszystkie różne. Wombat wybiera dwie różne karty i zapisuje sumę liczb z tych kart. Również on zrobił tabelkę: w pierwszym wierszu wypisał od największej do najmniejszej wszystkie sumy liczb, jakie można w takim eksperymencie otrzymać, a w drugim wierszu pod każdą sumą wpisał, na ile sposobów można ją uzyskać, przy założeniu, że **kolejność sumowania liczb na kartach NIE jest istotna**. Okazało się, że tabelki koali i wombata są identyczne. Podajcie przykładowy zestaw liczb na kartach wombata, przy którym opisana sytuacja jest możliwa, i uzasadnijcie, że jest poprawny.

Przykład: Gdyby wombat miał 6 kart oznaczonych zestawem liczb: $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4, 4, 4$, to w pierwszym wierszu jego tabelki byłyby liczby $8, 5\frac{1}{2}, 5, 3, 2\frac{1}{2}$, a w drugim – kolejno 3, 6, 3, 1 i 2.

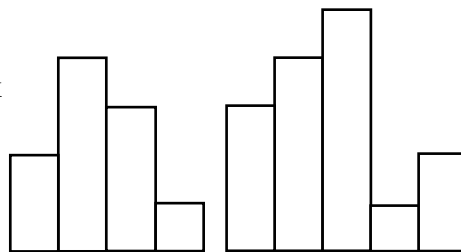
Zad. 7. Parzyste koła

Na zabawie integracyjnej do różnych tańców tworzą koła, tak że osoby stojące obok siebie się znały. (Znajomość rozumiemy symetrycznie, tzn. jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A). Okazało się, że wszystkie koła, które można tak zbudować, składają się z parzystej liczby osób.

Udowodnij, że wszystkich uczestników zabawy da się podzielić na dwie takie grupy, że w obrębie każdej z nich nikt nikogo nie zna.

Zad. 8. Mury

Z n klocków o wysokościach $1, 2, 3, \dots, n$ cm układamy murek i liczymy, ile jest w nim spadków, idąc po kolejnych klockach od lewej do prawej. Np. w murku na lewym rysunku spadki są dwa (po drugim i po trzecim klocku), a w murku z prawego rysunku – jeden (po trzecim klocku).



Kasia ułożyła wszystkie możliwe $9!$ murków z 9 klocków (o wysokościach $1, 2, 3, \dots, 9$ cm) i zliczyła, w ilu murkach jest dana liczba spadków, otrzymując następującą tabelkę:

spadków	0	1	2	3	4	5	6	7	8
murków	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

W ilu murkach z 10 klocków o wysokościach $1, 2, 3, \dots, 10$ cm jest 5 spadków?

Zad. 9. Bambusowy ogród

Panda ma ogród, w którym rosną trzy bambusy. W ciągu tygodnia pierwszy z nich rośnie o 8 m, drugi o 6 m, a trzeci o 3 m. Panda na koniec każdego tygodnia wybiera jeden z bambusów i przycina go do wysokości 1 m. Panda nie chce, aby jej bambusy były zbyt wysokie. Zakładamy, że na początku każdy bambus ma wysokość 1 m. Niech k oznacza najmniejszą taką liczbę, że żaden bambus nigdy nie przekroczy k m wysokości. Pomóżcie Pandzie opracować taki plan przycinania bambusów, aby liczba k była jak najmniejsza. Uzasadnijcie, że nie można ułożyć lepszego planu (tzn. dającego mniejszą liczbę k).

Przykład: jeśli założymy, że w ogrodzie rosną tylko dwa bambusy – jeden przyrastający o 2 m, a drugi o 1 m, a Panda w parzystych tygodniach przycina bambus pierwszy, a w nieparzystych bambus drugi. Wówczas pod koniec pierwszych czterech tygodni tuż przed przycięciem wysokości bambusów wynosiłyby kolejno: 3 m i 2 m, 5 m i 2 m, 3 m i 3 m, 5 m i 2 m. Natomiast liczba k wyniesie w tym przypadku 5.

Zad. 10. Śpiochy

Na wykładzie słynnego fizyka było 17 matematyków. Każdy z nich zasypiał na wykładzie dokładnie raz i spał przez pewien czas. W momencie rozpoczęcia i zakończenia wykładu nikt nie spał. Parę różnych matematyków nazywamy współspaczami, jeśli istniał jakiś moment wykładu, w którym obaj spali. Udowodnijcie, że po wykładzie jest przynajmniej pięciu matematyków, z których każdych dwóch jest współspaczami, lub przynajmniej pięciu, wśród których nie ma żadnej pary współspaczy.