



© Hanna Kuik

# KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

XIII EDYCJA

## II etap

30 STYCZNIA 2026

1. Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
2. Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
3. Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
4. **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**.
5. Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
6. Czas pracy to 120 minut.

### 1. Cut and add

Each member of the sequence 83, 20, 2, 8,... is obtained by adding four times the rightmost digit to the number formed by omitting that digit. Determine the 1000th member of this sequence.

### 2. Malowanie

Paweł ma puszkę z farbą, która wystarczyła dokładnie na pokrycie ściany kwadratowej, której bok ma długość będącą pewną liczbą naturalną. Kasia tą samą ilością farby pokryła kilka ścian prostokątnych: kwadrat o boku 4, kwadrat o boku  $n$  oraz sześć prostokątów o wymiarach  $4 \times n$ . Łączna powierzchnia ścian Kasi ma takie samo pole jak ściana Pawła. Wyznaczcie największą liczbę naturalną  $n$ , dla której opisana sytuacja jest możliwa.

### 3. Wyróżnione pary

Mamy ciąg złożony z sześciu różnych liczb naturalnych. Parę  $(x, y)$  wyrazów tego ciągu nazywamy parą wyróżnioną, jeśli  $x < y$  i wszystkie wyrazy ciągu pomiędzy  $x$  a  $y$  są mniejsze zarówno od  $x$ , jak i od  $y$ . Wyznaczcie największą możliwą liczbę wyróżnionych par.

Na przykład dla ciągu (1, 6, 2, 3, 5, 4) wyróżnionymi parami są: (1,6), (2,6), (2,3), (3,5), (4,5), (3,6), (5,6).

### 4. Pudełka

Mamy identyczne pudełka od zapalek, o wymiarach  $13 \times 31 \times 47$  (w milimetrach). Z trzech takich pudełek można na trzy różne sposoby zbudować prostopadłościan, co ilustruje rysunek.



Pudełko zawsze sklejamy z drugim pudełkiem ściankami o tych samych wymiarach. Na ile różnych sposobów można zbudować prostopadłościan z sześciu pudełek od zapalek?

Dwa prostopadłościany o takich samych wymiarach uważamy za identyczne, niezależnie od ich położenia w przestrzeni.

### 5. Trzynastka

Iłoma sposobami można rozłożyć liczbę 13 na naturalne składniki dodatnie, przy założeniu, że kolejność składników **nie** jest istotna?

Na przykład rozkład  $2 + 1 + 1 + 1 + 8$  jest taki sam jak rozkład  $2 + 1 + 8 + 1 + 1$ , ale inny niż  $2 + 2 + 1 + 8$ .

### 6. Podróże kosmiczne

Kosmiczna Organizacja Autonomicznych Lokalizacji Astralnych (w skrócie: KOALA) składa się z  $n$  ( $n \geq 2$ ) planet, podczas gdy Eteryzna Międzyplanetarna Unia (w skrócie: EMU) ma  $m$  ( $m \geq 2$ ) planet. Każda planeta z organizacji KOALA jest połączona z każdą planetą z EMU za pomocą dokładnie jednego tunelu czasoprzestrzennego i to są jedyne tunele czasoprzestrzenne między tymi planetami. Zarząd nad tymi tunelami mają objąć dwie kompanie handlowe: Gwiezdna i Słoneczna. Za każdą podróż jednym z zarządzanych przez kompanie tuneli pobierane są opłaty: Gwiezdna żąda 1000 kosmozłotych, a Słoneczna 2000 kosmozłotych. Politycy, którzy przydzielą tunele do tych dwóch kompanii, planują kierować się następującymi zasadami:

- (a) Każdym tunelem będzie zarządzać dokładnie jedna z tych kompanii.
- (b) Jeśli dana planeta jest połączona tunelami z  $k$  innymi planetami, to co najwyżej  $\lceil \frac{k}{2} \rceil$  z tych tuneli może być zarządzane przez tę samą kompanię handlową.
- (c) Dla dowolnych dwóch planet połączonych tunelem sumy opłat pobieranych za podróże przez wszystkie tunele z nich wychodzące mają być różne.

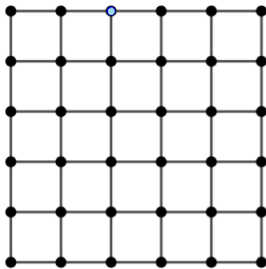
Znajdźcie wszystkie pary liczb naturalnych  $n, m$ , dla których da się przydzielić tunele do kompanii handlowych Gwiezdna i Słoneczna zgodnie z powyższymi zasadami.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej  $x$  napis  $\lceil x \rceil$  oznacza najmniejszą liczbę naturalną  $k$ , dla której  $x \leq k$ ; np.  $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ , a  $\lceil \frac{4}{2} \rceil = 2$ .

## 7. Niebieska epidemia

W Koalowie wybuchła epidemia choroby caeruleus-13, w wyniku której futro zarażonych koali staje się niebieskie. Pomimo epidemii koale wciąż chętnie odwiedzają się wzajemnie, więc codziennie każdy chory koala zaraża wszystkich swoich znajomych. Miś koala staje się chory nazajutrz po kontakcie z zarażonym znajomym.

Na poniższym rysunku schematycznie przedstawiono sieć znajomości koali z Koalowa. Każda kropka przedstawia jednego koalę z Koalowa, a linia między dwiema kropkami oznacza, że koale odpowiadające kropkom są znajomymi. Jasna kropka oznacza misia koalę, który jako pierwszy zachorował na caeruleus-13.



Doktor wombat w tym samym dniu, w którym zachorował pierwszy koala, opracował szczepionkę, ale może wyprodukować tylko jedną dawkę dziennie. Po podaniu szczepionki koala staje się bezterminowo odporny na zachorowanie na caeruleus-13, nie będzie też nikogo zarażać. Aby szczepionka zadziałała, należy ją podać zanim koala zachoruje, natomiast można ją (skutecznie) podać tego samego dnia, w którym koalę odwiedził inny zarażony koala. Przykładowo, pierwszego dnia pierwszy chory koala odwiedza swoich 3 sąsiadów. Wombat może ocalić jednego z nich, podając mu swoją pierwszą szczepionkę. Natomiast podanie szczepionki pierwszemu zarażonemu koali nie przyniesie żadnego efektu (w szczególności nie zablokuje rozszerzania się choroby). Ile maksymalnie koali z Koalowa doktor wombat może ocalić od zachorowania? Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że więcej koali nie można ocalić.

Punkty częściowe w tym zadaniu można uzyskać także za poprawne, ale nieoptymalne oszacowania maksymalnej liczby koali ocalonych od zachorowania

## 8. Maszyna Trurla II

Po słynnej katastrofie swojej pierwszej maszyny konstruktor Trurl zbudował inną, do wytwarzania ciągów binarnych. Najpierw na ekranie maszyny wyświetla się ciąg złożony tylko z zera. Potem można dowolnie wiele razy ciąg zmieniać, wciskając jeden z przycisków: A, B, C, D. Oto jak działają przyciski:

- Przycisk A dopisuje do ciągu na ekranie jedynkę, na jego końcu.
- Przycisk B pozwala wybrać użytkownikowi jakąś sekwencję 000 i zmienić ją na jedynkę. Jeśli sekwencji 000 nie ma, klawisz ten nic nie robi.
- Przycisk C pozwala wybrać użytkownikowi jakąś sekwencję 111 i usunąć ją z ciągu. Jeśli sekwencji 111 nie ma, klawisz ten nic nie robi.
- Przycisk D dopisuje do ciągu jego kopię (kopia dopisywana jest na końcu ciągu). Powstaje wtedy ciąg dwa razy dłuższy.

Czy istnieje seria przycisków, pozwalająca wytworzyć ciąg 100100100?