



KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

XIII EDYCJA

finał dla szkół ponadpodstawowych

10 KWIETNIA 2026

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem.**
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Transylwania

W Transylwanii mieszkają tylko ludzie i wampiry (nie różniące się wyglądem od ludzi). Ludzie tamtejsi zawsze mówią prawdę, a wampiry zawsze kłamią. Część ludzi oraz część wampirów jest obłąkana i są przekonani, że wszystkie zdania prawdziwe są fałszywe, a wszystkie zdania fałszywe są prawdziwe. Na przykład na pytanie „Czy $2+2=4$?” zdrowy człowiek odpowie „tak”, człowiek obłąkany „nie” (bo jest przekonany, że taka jest prawda), zdrowy wampir – „nie” (bo skłamię), obłąkany wampir – „tak” (bo myśli, że jest inaczej, ale tego nie powie).

Pewien turysta spotkał na szlaku trzech Transylwańczyków, którzy dobrze się nawzajem znają. Każdy z nich powiedział mu coś o ich trójce:

- Pierwszy Transylwańczyk: *Wszyscy jesteśmy ludźmi.*
- Drugi Transylwańczyk: *Dokładnie jeden z nas jest człowiekiem. Ktoś z nas jest zdrowy.*
- Trzeci Transylwańczyk: *Dokładnie jeden z nas jest człowiekiem. Ktoś z nas jest obłąkany.*

Kim są rozmówcy turysty (tzn. czy są ludźmi, czy wampirami i czy są zdrowi, czy obłąkami)? Podajcie wszystkie możliwości.

2. Podróż przez pustynię

Na jednym z krańców pustyni stoi ciężarówka z pustym bakiem oraz znajduje się tam stacja benzynowa. Źródło z nieograniczoną ilością paliwa. Ciężarówka tankuje do baku paliwo, a pełny bak starcza jej do przejechania 500 km. Ciężarówka może przewozić paliwo wyłącznie w baku. W dowolnym miejscu na pustyni kierowca ciężarówki może urządzić stację benzynową, czyli zostawić tam część paliwa, które potem może zatankować.

Ile najmniej wizyt (łącznie z początkową) na stacji Źródło potrzebuje kierowca, żeby przejechać przez całą pustynię po prostej drodze, do oddalonej o 750 km stacji końcowej?

Przyjmujemy, że ciężarówka przez cały czas jazdy ma stałe spalanie (niezależne od prędkości, ukształtowania terenu oraz innych czynników).

3. Wesele

Na weselu Lucjana i Jadwigi nie mogło zabraknąć zabaw! Przed Lucjanem ustawiono 20 kubeczków, każdy z nich tworzył osobny, mały stół. W każdym kubeczku Jadwiga schowała żeton o wartości 1 – tak na dobry początek gry. Zasady były proste. Lucjan miał wykonać 19 ruchów. W każdym ruchu wybierał dwa dowolne stoły, zbierał z nich wszystkie żetony, a kubeczki łączył w jeden nowy stół. Gdy tylko to zrobił, Jadwiga – czuwająca nad grą – wkładała do nowo powstałego stołu dodatkowy żeton, którego wartość była równa kwadratowi liczby kubeczków w tym stole. Kiedy wszystkie kubeczki połączyły się w jeden wielki stół, gra dobiegła końca, a Jadwiga przyniosła tyle cukierków, ile wynosiła łączna wartość 38 żetonów zebranych przez Lucjana. Jadwiga, chcąc uniknąć wpadki, wcześniej zaopatrzyła się w zapas słodczy. Jaką najmniejszą liczbę cukierków mogła ona przygotować, aby mieć pewność, że wystarczy ich na całą tę weselną zabawę?

4. Klocki sześciennie

Koala ma 207 klocków ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 207. Chce ułożyć je wszystkie w rzędzie w taki sposób, żeby suma liczb na dowolnych dwóch sąsiednich klockach była sześcianiem pewnej liczby naturalnej. Przykładowo, w takim rzędzie mogłyby pojawić się kolejno klocki oznaczone liczbami 6, 2, 25 (bo $6+2=2^3$ i $2+25=3^3$), ale sąsiadami w takim rzędzie nie mogłyby być klocki o numerach 3 i 4. Czy koala może osiągnąć swój cel?

5. Punkty w kole

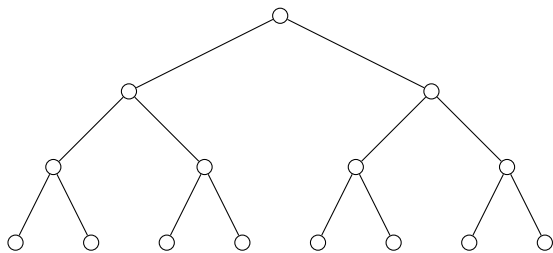
Na płaszczyźnie dane jest koło o promieniu 1. Wybrano 88 różnych punktów należących do tego koła. Wykażcie, że istnieje koło o promieniu $\frac{1}{2}$, zawierające przynajmniej 13 ze wspomnianych punktów.

6. Ładne ośmiokąty II

Ośmiokąt wypukły na płaszczyźnie nazwiemy ładnym, jeśli wszystkie jego kąty mają taką samą miarę, wszystkie współrzędne jego wierzchołków są liczbami naturalnymi, jego pole jest liczbą naturalną oraz przynajmniej jeden bok jest równoległy do którejś osi układu współrzędnych. Udowodnijcie, że dla każdej liczby naturalnej $k \geq 13$ istnieje ładny ośmiokąt o polu k .

7. Drzewo binarne

Mamy drzewo binarne T wysokości 3, o 15 wierzchołkach, czyli graf, którego przykładowy rysunek widzimy poniżej.



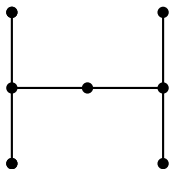
Oznaczmy przez $g(u, v)$ grafową odległość między wierzchołkami u oraz v na drzewie, to znaczy liczbę krawędzi na ścieżce z u do v . Na drzewie T najmniejsza odległość między różnymi wierzchołkami wynosi 1, a największa jest równa 6.

Załóżmy, że drzewo narysowano na płaszczyźnie w taki sposób, że każdemu wierzchołkowi odpowiada punkt na płaszczyźnie (różnym wierzchołkom – różne punkty), a każdej krawędzi odpowiada na płaszczyźnie odcinek długości 1. Przez $d(u, v)$ oznaczmy odległość na płaszczyźnie między punktami odpowiadającymi wierzchołkom u i v . *Zniekształceniem* dla danego rysunku nazywamy liczbę

$$\max \left\{ \frac{g(u, v)}{d(u, v)} : u, v \text{ są różnymi wierzchołkami drzewa} \right\}.$$

Znajdźcie rysunek drzewa T o jak najmniejszym zniekształceniu. Im mniejsze zniekształcenie, tym lepiej – nie musi być najmniejsze możliwe. Dla znalezionego rysunku wyznaczcie zniekształcenie.

Gdyby drzewo binarne miało wysokość 2 i narysowane było jak poniżej, to zniekształcenie dla tego rysunku byłoby równe 2.



8. Czerwone i czarne

Rozważmy taką grę na planszy 3000×3000 . Pierwszy gracz w każdej rundzie stawia dwa czerwone pionki, po jednym na dwóch niezajętych polach, zaś drugi stawia jeden czarny pionek na niezajętym polu. Pierwszy gracz chce uzyskać serię 10 czerwonych pionków stojących obok siebie w linii poziomej, zaś celem drugiego jest jedynie przeszkodzić pierwszemu. W tej grze nie może być zatem remisu: jeśli powstanie seria 10 czerwonych pionków w poziomie, to wygrywa pierwszy gracz; jeśli nie powstanie – wygrywa drugi. Kto ma strategię wygrywającą?

Przez strategię wygrywającą rozumiemy sposób gry gwarantujący wygraną, niezależnie od tego, czy przeciwnik robi błędy, czy nie.

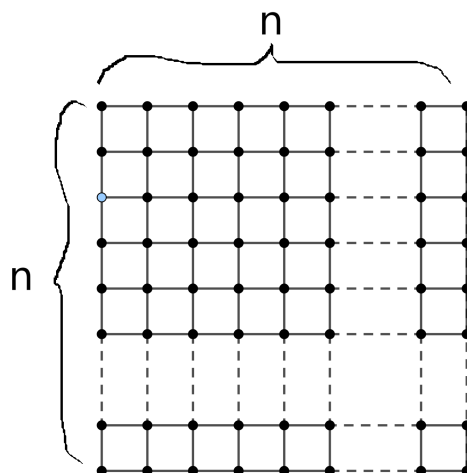
9. Trójkąty

Na płaszczyźnie dany jest zbiór A składający się z 10 punktów. Dokładnie 5 z nich leży na pewnej prostej i żadna inna prosta nie zawiera więcej niż dwa punkty z A . Ile można utworzyć trójkątów o wszystkich trzech wierzchołkach należących do zbioru A ?

10. Niebieska epidemia II

W Koalowie wybuchła epidemia choroby caeruleus-13, w wyniku której futro zarażonych koali staje się niebieskie. Pomimo epidemii koale wciąż chętnie odwiedzają się wzajemnie, więc codziennie każdy chory koala zaraża wszystkich swoich znajomych. Miś koala staje się chory nazajutrz po kontakcie z zarażonym znajomym i nigdy nie zdrowieje.

W Koalowie żyje n^2 koali ($n \geq 6$). Na poniższym rysunku schematycznie przedstawiono sieć znajomości koali z Koalowa, która ma kształt kraty o wymiarach $n \times n$. Każda kropka przedstawia jednego koalę z Koalowa, a linia między dwiema kropkami oznacza, że koale odpowiadające kropkom są znajomymi. Jasna kropka oznacza misia koalę, który jako pierwszy zachorował na caeruleus-13.



Doktor wombat w tym samym dniu, w którym zachorował pierwszy koala, opracował szczepionkę, ale może wyprodukować tylko jedną dawkę dziennie. Po podaniu szczepionki koala staje się bezterminowo odporny na zachorowanie na caeruleus-13, nie będzie też nikogo zarażać. Aby szczepionka zadziałała, należy ją podać (skutecznie) tego samego dnia, w którym koalę odwiedzi inny zarażony koala. Przykładowo, pierwszego dnia pierwszy chory koala odwiedza swoich trzech znajomych. Wombat może ocalić jednego z nich, podając mu swoją pierwszą szczepionkę. Natomiast podanie szczepionki pierwszemu zarażonemu misiowi koala nic nie da (w szczególności nie zablokuje rozszerzania się choroby). Ile maksymalnie koali z Koalowa doktor wombat może ocalić od zachorowania? Nie zapomnijcie o uzasadnieniu, że więcej koali nie można ocalić.

Punkty częściowe w tym zadaniu można uzyskać także za poprawne, ale nieoptymalne oszacowania maksymalnej możliwej liczby koali ocalonych od zachorowania.