

Konkurs matematyczno-informatyczny Koala. Edycja XIII
Finał dla szkół podstawowych

1. Cukierki

Kasia i Ania mają 40 jednakowych cukierków. Narysowały planszę 4×4, na której chcą te cukierki ułożyć, zachowując następujące warunki:

- każdy wiersz zawiera pole z jednym, dwoma, trzema i czterema cukierkami;
- każda kolumna zawiera pole z jednym, dwoma, trzema i czterema cukierkami;
- każdy kwadrat 2×2 (z pogrubioną linią) zawiera pole z jednym, dwoma, trzema i czterema cukierkami.

Gdy dziewczęta ułożyły cukierki w pierwszym wierszu, zauważyły, że mają wiele możliwości rozmieszczenia pozostałych cukierków.

Na ile sposobów mogą to zrobić bez dokonywania zmian w pierwszym wierszu? Odpowiedź uzasadnij.

2. Gęś – gęś – kaczką

Trener ustawił zawodników z kadry w kręgu po kolei, według numerów na koszulkach, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Numery to kolejne liczby naturalne od 1. Chcąc wytypować kapitana drużyny zastosował wyliczankę gęś – gęś – kaczką: Trener obchodzi zawodników stojących w kręgu (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) i oznacza ich po kolei zgodnie ze schematem: gęś – gęś – kaczką – gęś – gęś – kaczką. Każdy zawodnik, którego oznaczono „gęś” opuszcza krąg. Trener kontynuuje wyliczankę tak długo, aż zostanie tylko jeden zawodnik i to on zostanie kapitanem.

Przykład. Gdy jest 8 zawodników, typowanie kapitana przebiega następująco: zawodnik nr 1 – gęś (odpada), nr 2 – gęś (odpada), nr 3 – kaczką (zostaje), nr 4 – gęś (odpada), nr 5 – gęś (odpada), nr 6 – kaczką (zostaje), nr 7 – gęś (odpada), nr 8 – gęś (odpada), nr 3 – kaczką (zostaje), nr 6 – gęś (odpada). Został tylko jeden zawodnik, koniec odliczania. Zawodnik nr 3 wygrał.

Z ilu zawodników powinna składać się drużyna, aby zawodnik z najwyższym numerem został kapitanem? Zawodników jest co najmniej 10, ale nie więcej niż 30. Odpowiedź uzasadnij.

3. Gra majówkowa

Bartek i Adam wymyślili następującą grę na majówkę:

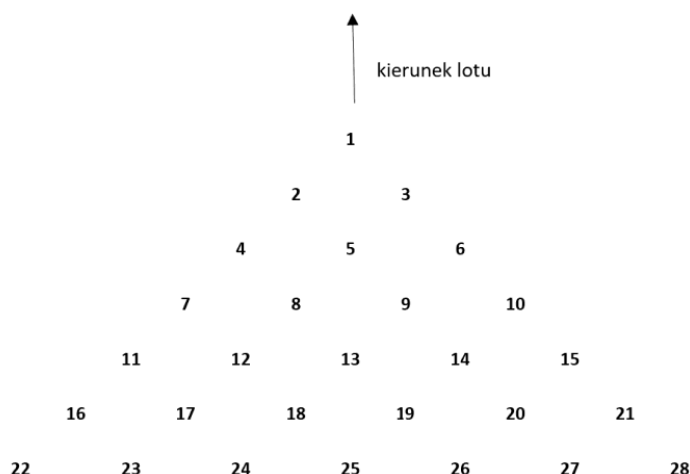
Program komputerowy, który napisali, losuje dodatnią czterocyfrową liczbę całkowitą i wskazuje gracza, który rozpoczyna grę. Ruch rozpoczynający polega na wypowiedzeniu dodatniej liczby całkowitej mniejszej od wylosowanej i stanowiącej co najmniej jej połowę. Następnie drugi gracz podaje dodatnią liczbę całkowitą mniejszą od wypowiedzianej przed chwilą przez przeciwnika i stanowiącą co najmniej jej połowę. Dalej obaj gracze na przemian wypowiadają liczby, stosując tę regułę. Gracz, który poda liczbę 1 przegrywa.

Program wylosował liczbę 2026 i wskazał Adama.

Kto wygra? Opisz jego strategię i uzasadnij, że działa, tzn. pokaż, że stosujący ją chłopiec wygra niezależnie od tego, jak gra jego przeciwnik.

4. Żurawie

Magda lubi obserwować klucze ptaków. Zauważyła, że u żurawi na czole szybuje jeden ptak, za nim w drugim szeregu – dwa ptaki, w trzecim szeregu – trzy itd.



Szyk tej lotnej kolumny przypomina nam trójkąt.

Inną pasją Magdy jest programowanie. Projektując na kartce model klucza żurawia, ponumerowała ptaki kolejnymi liczbami naturalnymi (jak na rysunku).

Jakie numery mają ptaki, które znajdują się najbliższej żurawia o numerze 2026? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład. W najbliższym sąsiedztwie żurawia o numerze 13 leżą żurawie o numerach 8, 9, 12, 14, 18 i 19.

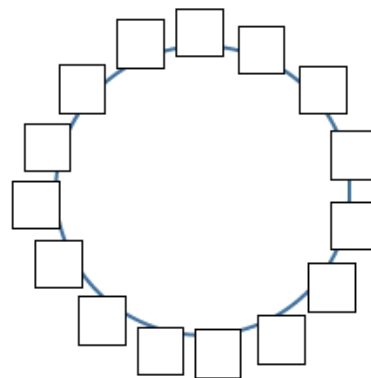
5. Liczby trójkątne

Liczby trójkątne to takie liczby naturalne, które można przedstawić graficznie w formie trójkąta równobocznego.

Rysunek przedstawia pierwsze trzy takie liczby: 1, 3 i 6.



Podaj przykład takiego rozmieszczenia liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 na okręgu, aby wszystkie sumy par sąsiednich liczb były liczbami trójkątnymi.



Jeśli uznasz, że to niemożliwe, to uzasadnij dlaczego.

6. Pasek z cyframi

Ciąg cyfr 1 2 3 4 jest zapisany 105 razy na pasku papieru, jak schematycznie pokazano na poniższym rysunku.

1 2 3 4 1 2 3 ... 4 1 2 3 4 1 2 3 4

Koala chce pociąć pasek pomiędzy cyframi, pozostawiając w każdym segmencie cyfrę lub ciąg cyfr tworzący liczbę. Ile najwięcej różnych liczb Koala mógłby uzyskać? Odpowiedź uzasadnij.

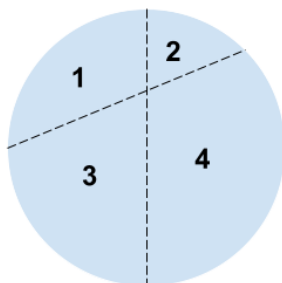
Przykład. Gdyby pasek miał postać 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4, to wykonując cięcia, np. po pierwszej „2”, po pierwszej „3”, po drugiej „2” i po drugiej „3” Koala dostałby pięć liczb: 12, 3, 412, 3 i 41234, ale różnych tylko cztery.

7. Pizza

Ile najwięcej kawałków okrągłej pizzy można uzyskać za pomocą sześciu prostoliniowych cięć nożem? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład.

Poniższy rysunek przedstawia przykład optymalnego podziału pizzy za pomocą dwóch cięć.



8. Skarbiec

W krainie KO słowa składają się wyłącznie z liter K i O. Król tej krainy ma czterech synów. Ponieważ był mądry postanowił zabezpieczyć majątek królestwa hasłem. Wymyślił hasło do skarbcza składające się z 7 znaków. Hasło można wpisać na klawiaturze tylko raz. Pomyłka spowoduje zniszczenie skarbcza z całą zawartością.

Aby żaden z braci nie przechytrył pozostałych, mądry król przekazał w tajemnicy każdemu z synów inaczej zmodyfikowany (niepoprawny) klucz. W każdym przypadku owa modyfikacja polegała na zamianie miejscami dokładnie dwóch liter właściwego hasła i synowie o tym wiedzieli. Aby otworzyć skarbiec bracia musieli wspólnie odtworzyć prawidłowe hasło poprzez analizę otrzymanych od ojca kluczy: OOKKOKK, OOKKKKO, KOKOKKO oraz KKOKOKO.

Jakie jest hasło do skarbcza? Odpowiedź uzasadnij.



(C) Hanna Kuik

9. Stolarsnia

Stolarsnia zatrudniła pięciu pracowników i chce ich przydzielić do specjalistycznych stanowisk.

Na próbę, by ocenić ich umiejętności zlecono stolarzom wykonanie prac przy każdym z pięciu stanowisk.

Kierownik odnotował w tabeli każde z uchybień.

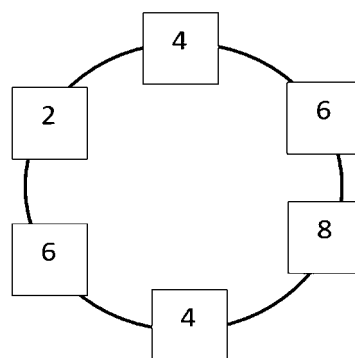
	Arek	Bartek	Monika	Piotr	Sylwia
stanowisko 1	2	7	8	5	7
stanowisko 2	6	4	7	6	8
stanowisko 3	4	2	5	6	2
stanowisko 4	7	3	8	5	4
stanowisko 5	6	5	6	4	7

Liczby przedstawiają liczbę uchybień przy stanowisku – im mniejsza liczba, tym efektywniej wykonana praca.

Które stanowiska przydzielić stolarzom, aby uzyskać jak największą efektywność (najmniejszą liczbę uchybień)? Odpowiedź uzasadnij.

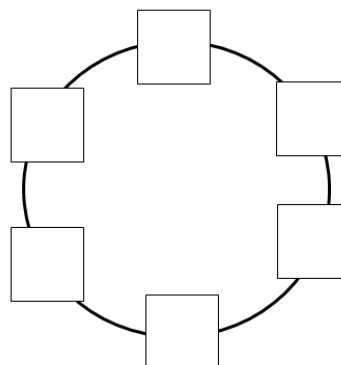
10. Siódemka

Diagram przedstawia koło, na którym rozmieszczono sześć cyfr w taki sposób, że każda liczba, utworzona przez trzy odczytane kolejno cyfry (w kierunku ruchu wskazówek zegara), jest różna od pozostałych i podzielna przez 6.



Liczby 246, 468, 684, 846, 462 i 624 są podzielne przez 6.

Podaj przykład takiego rozmieszczenia na kole sześciu cyfr (nie używaj 0), aby każda z sześciu trzycyfrowych liczb, utworzona w opisany sposób, była różna od pozostałych i podzielna przez 7.



Jeśli uznasz, że to niemożliwe, to uzasadnij dlaczego.