



Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min. Czas na zadawanie pytań: 15 min.

1. W zamku grafa

W zamku grafa Koalburga mieszkają szpiegdy i rycerze. Każde wypowiedziane przez szpiegów zdanie jest kłamstwem, a każde zdanie wypowiedziane przez rycerzy jest prawdziwe. Czasem jednak graf Koalburg za zasługi pasuje szpiega na rycerza i oczywiście nowo pasowany rycerz przestaje kłamać. Rycerz natomiast nigdy nie może stać się szpiegiem. Mieszkańcy zamku wiedzą z kilkudniowym wyprzedzeniem, kto i kiedy zostanie pasowany na rycerza. Przybysze spoza zamku nie potrafią po wyglądzie odróżnić szpiegów od rycerzy. Wędrowny bard przybył do zamku i podczas wieczery poznał trzech jego mieszkańców: Alfreda, Beniamina i Cezarego. Beniamin powiedział mu, że cała ich trójka to szpiegdy. Natomiast Cezary stwierdził, że jutro rano ktoś z ich trójki zostanie pasowany na rycerza. Następnie bard został poproszony o występ, więc rozmowa została przerwana. Jednak następnego dnia popołudniu spotkał Alfreda ponownie i ten powiedział mu, że rano pasowano Cezarego na rycerza. Czy na podstawie tych wypowiedzi bard może stwierdzić, kim drugiego dnia jego wizyty popołudniu dokładnie jest (tzn. czy jest szpiegiem czy rycerzem)

- (a) Alfred?
- (b) Beniamin?
- (c) Cezary?

Zakładamy, że jeśli na zamku doszło do ceremonii pasowania na rycerza, to bard nie był na nią zaproszony i inni mieszkańcy zamku poza Alfredem z nim o niej nie rozmawiali.

2. Monety na stos

Na każdym polu nieskończonej szachownicy leży moneta. Traktujemy każdą z nich jako stos wysokości 1. W każdym ruchu można wybrać dwa stosy z pól sąsiadujących bokiem i przełożyć monetę z jednego stosu na drugi, przy czym nie wolno przekładać monety ze stosu wyższego na niższy. Wykonując serię tego typu ruchów, chcemy ułożyć jak najwyższy stos. Jaki najwyższy stos potraficie ułożyć?

3. Ogród

Ogród ma kształt kwadratu o boku 8 m. Ogrodnik podzielił go na 8×8 kwadratów o boku 1 m, po czym w każdym z 64 środków kwadratów zrobił małą dołkę. Teraz zamierza wrzucić do każdej dołki po jednym nasionku. Ma w paczce mieszaną nasion 64 różnych roślin. Niektóre z roślin nie mogą rosnąć zbyt blisko siebie, bo sobie nawzajem szkodzą. Wiadomo, że dla każdego nasionka są co najwyżej dwa inne, które muszą być od niego posiane w odległości przynajmniej 2 m. Uzasadnijcie, że dla dowolnej mieszanki 64 nasion spełniającej ten warunek istnieje dobre rozmieszczenie nasion w dołkach, to znaczy takie, że żadne dwie rośliny nie będą sobie szkodzić.

4. Worki

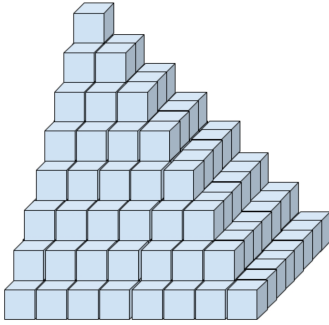
Macie 8 worków, w każdym jest po 60 monet. Wszystkie monety wyglądają identycznie, jednak w 3 workach znajdują się wyłącznie fałszywe monety, a w 5 pozostałych – wyłącznie monety prawdziwe. Każda prawdziwa moneta waży 20 g, a każda fałszywa – 10 g. Nie wiecie, w których trzech workach są monety fałszywe, ale chcielibyście się tego dowiedzieć, wykonując jedno ważenie na wadze elektronicznej. Waga jest precyzyjna, można dzięki niej poznać dokładną wagę dowolnej liczby monet z worków. Waszym zadaniem jest zidentyfikować worki z fałszywymi monetami, ważąc jak najmniej monet. Im mniej monet użyjecie – tym lepiej. Dokładnie opiszcie, ile monet z którego worka wkładacie na wagę i dlaczego dzięki temu osiągniecie cel.

5. Bity

Maszyna n -Bit potrafi w jednym kroku zmienić jeden bit w n -bitowym ciągu. Czy możliwe jest uzyskanie za pomocą tej maszyny wszystkich możliwych ciągów n bitów, jeśli praca zaczyna się od ciągu, w którym na zmianę występują jedynki i zera (czyli 1010101...) oraz na nim kończy, a każdy z innych ciągów występuje tylko raz?

6. Piramida

Piramida na rysunku składa się z sześciątów ułożonych w 8 warstwach. Można policzyć, że są tu 204 sześciiany.



Z ilu najmniej warstw powinna składać się podobna piramida, by sześciątów ją tworzących było co najmniej 2026?

7. Misiowe ciągi

Miś koala polubił nawiasy. Zanim je jednak schrupie, musi się upewnić, że są ułożone w odpowiedni sposób. Sekwencję nawiasów nazwiemy misiową, gdy spełnia wszystkie poniższe warunki:

- Każdy znak sekwencji jest nawiasem okrągłym lub kwadratowym, czyli jednym z czterech znaków: $(,), [,]$.
- Żadne dwa kolejne nawiasy nie są identyczne.
- Nawiasy można połączyć w pary w taki sposób, że każdemu otwierającemu nawiasowi odpowiada występujący na prawo od niego nawias zamykający (okrągłemu odpowiada okrągły, kwadratowemu – kwadratowy).
- Jeśli między jakąś parą, o której mowa wyżej, jest jakiś nawias, to odpowiadający mu nawias również znajduje się między wspomnianą parą.

Na przykład misiową sekwencją jest $(())$ czy $(([]))$, a nie są misiowe np.: $()()$, $([())$, $(([]))$.

Ile jest misiowych sekwencji złożonych z 8 znaków?

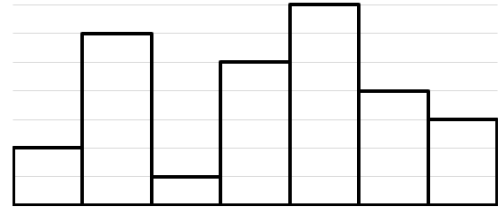
8. Czworokątny PIES

Dany jest czworokąt wypukły $PIES$, który nie jest trapezem. Oznaczmy przez a_1, b_1, c_1, d_1 proste, odpowiednio, PI, IE, ES, SP . Proste a_2 i a_3 są różne, równoległe do prostej a_1 i leżą po jej przeciwnej stronie niż czworokąt $PIES$. Analogicznie położone są trzy proste b_2, b_3, b_4 równoległe do b_1 , cztery proste c_2, c_3, c_4, c_5 równoległe do c_1 oraz pięć prostych d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 równoległe do d_1 .

Ile jest czworokątów, których każdy bok zawiera się w jednej z opisanych tu 18 prostych?

9. Spadki

Wombat ma prostopadłościennych klocki o wysokościach $1, 2, \dots, n$, po jednym każdego rodzaju. Ustawia je jeden za drugim, w dowolnej kolejności. Dla $n = 7$ mógłby uzyskać układ jak na rysunku.



Widzimy tu trzy spadki: z klocka wysokości 6 na klocki wysokości 1, z wysokości 7 na 4 i z wysokości 4 na 3.

Na ile sposobów wombat może ustawić swoje n klocków tak, by w ciągu ich wysokości

- był tylko jeden spadek?
- spadków było dokładnie $n - 2$?

10. Gra w łamane

Na płaszczyźnie są dwa czerwone, różne punkty X i Y . Ala i Barnaba wykonują ruchy na przemian, zaczyna Ala. Ruch polega na:

- narysowaniu najpierw łamanej łączącej pewne dwa czerwone (niekoniecznie różne) punkty, która ma co najmniej dwa odcinki oraz nie przecina już narysowanych łamanych ani samej siebie;
- następnie pomalowaniu jednego z wierzchołków narysowanej przez siebie łamanej, różnego od jej końców, na czerwono.

Jedynymi punktami wspólnymi łamanych mogą być ich końce, a żaden czerwony punkt nie może być końcem więcej niż trzech narysowanych odcinków.

Na przykład, jeśli w pierwszym ruchu Ala połączy X i Y łamaną o dwóch odcinkach i pomaluje na czerwono jej wierzchołek Z , to Barnaba nie może narysować łamanej o obu końcach w Z , bo po jego ruchu z Z wychodziłyby cztery odcinki.

Przegrywa osoba, która nie może wykonać ruchu. Kto ma strategię wygrywającą?

Przez strategię wygrywającą rozumiemy sposób gry gwarantujący wygraną, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.