Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

VIII edycja

finał szkół ponadpodstawowych

24 maja 2021

© Hanna Kuik

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 90 minut. Powodzenia!

1. Kapitan

Jesteś kapitanem zespołu 49 marynarzy, siedzących po siedmiu w siedmiu łodziach podwodnych. Twój kontakt z załogami jest ograniczony. Każdego dnia możesz jedynie poprosić każdą załogę o przesłanie raz pewnej informacji w postaci liczby naturalnej, mniejszej od 256. Łodzie nie kontaktują się między sobą i przesłanie pytań do wszystkich łodzi następuje równocześnie (pytania nie muszą być identyczne). Dziś chciałbyś się dowiedzieć czegoś o ciśnieniu twoich marynarzy. Wiesz jedynie, że ciśnienie każdego jest inną liczbą naturalną dodatnią, mniejszą od 256. Gdyby uporządkować ciśnienia marynarzy, utworzyłyby 49-elementowy ciąg rosnący. Chciałbyś poznać jeden z wyrazów tego ciągu, spośród stojących na miejscach od 25. do 41. włącznie (nie musisz poznać pozycji tego wyrazu). O jakie informacje poprosisz załogi? Jak na podstawie otrzymanych siedmiu liczb (informacji) wyznaczysz interesujący cię wyraz ciągu?

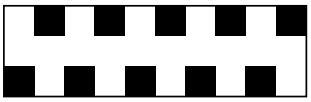
2. Gabinety dyplomatów

Dziesięciu dyplomatów zasiadło do obrad przy okrągłym stole. Pechowo usiedli tak, że nikt nie lubi się ani ze swoim sąsiadem po lewej, ani po prawej stronie. Wiadomo, że każdy dyplomata ma wśród uczestników obrad, prócz swoich sąsiadów, jeszcze dokładnie dwóch innych, z którymi się nie lubi. W przerwie obrad dyplomaci postanowili odpocząć w przyjaznych grupach i skorzystać w tym celu z czterech gabinetów o numerach: I, II, III i IV. Ustalili, że wstaną od stołu kolejno, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zaczynając od ambasadora Australii. W tej samej kolejności wybiorą gabinety. Każdy wejdzie do pierwszego gabinetu (w kolejności I, II, III, IV), w którym ze wszystkimi się lubi. Czy na pewno każdy dyplomata znajdzie pokój do odpoczynku? Jeśli tak, to uzasadnijcie, dlaczego zawsze jest to możliwe. Jeśli nie, to podajcie odpowiedni przykład, opisując, jak dyplomaci siedzą przy stole i kto z kim się nie lubi.

Przykład: Załóżmy, że pierwsze cztery osoby, które wstały od stołu to kolejno ambasadorzy Australii, Bahrajnu, Chile i Dominikany, przy czym nie lubią się ambasadorzy Australii i Bahrajnu, Australii i Chile, Bahrajnu i Chile oraz Chile i Dominikany. Wtedy zgodnie z algorytmem ambasadorzy wybiorą kolejno pokoje: I, II, III i I.
Uwaga: Jeśli dyplomata A nie lubi dyplomaty B, to również dyplomata B nie lubi dyplomaty A.

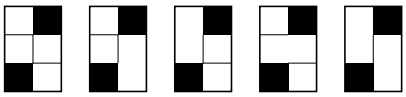
3. Mozaika

Koala ogląda mozaikę w kształcie prostokąta o wymiarach 10×3, która jest wykonana z czarnych kwadratowych płytek o boku 1, zielonych kwadratowych płytek o boku 1 oraz niebieskich prostokątnych płytek o wymiarach 1×2. Niestety dziś rano zamiast liści eukaliptusa zjadł przez pomyłkę liście *meukaliptusa*, przez co pogorszył mu się wzrok i widzi dobrze jedynie czarne płytki. To, co udało mu się zobaczyć, znajduje się na poniższym rysunku.



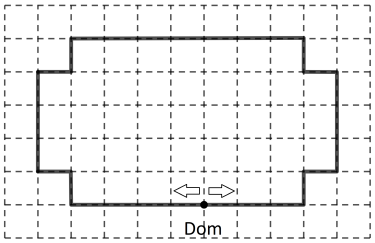
Na tej podstawie koala chciałby odtworzyć oglądaną mozaikę. Na ile sposobów może to zrobić?

Gdyby koala oglądał mozaikę o wymiarach 2×3, to byłoby pięć takich sposobów:



4. Zgubiony telefon

Młodszy brat Rafała w czasie spaceru zgubił telefon. Rafał postanowił wsiąść na rower i przejechać przynajmniej raz przez każdy odcinek trasy, po której spacerował jego brat. Niestety rower jest niesprawny i może skręcać tylko w lewo. Rafał nie chce robić piruetów, więc na każdym skrzyżowaniu jedzie prosto lub skręca o 90° w lewo. Jego brat zaznaczył pogrubioną kreską na poniższej mapce, którymi ulicami spacerował (pozostałe ulice zaznaczone są przerywaną linią). Rafał zaczyna jazdę z domu i na początku wybiera jeden z dwóch kierunków zaznaczonych strzałkami.



(a) Ile co najmniej skrętów musi wykonać, aby pokonać rowerem całą trasę spaceru?
(b) Ile skrętów wystarczy?

W obu podpunktach podajcie najlepsze oszacowanie, jakie potraficie uzasadnić.

Uwaga: Rafał nie musi wrócić do domu.

5. Tasowanie przez przekładanie

Mamy talię kart składającą się z 13 kierów, od dwójki do asa. Tasujemy ją w taki sposób: Dzielimy talię na dwie części i zamieniamy części miejscami.

Na przykład dla 5 (zamiast 13) kart ułożonych w porządku $(2, 3, 4, 5, 6)$ można otrzymać tylko talie z taką kolejnością kart: $(3, 4, 5, 6, 2)$, $(4, 5, 6, 2, 3)$, $(5, 6, 2, 3, 4)$, $(6, 2, 3, 4, 5)$.

Opisane przekładanie 13-kartowej talii możemy wykonać dowolną liczbę razy. Czy z talii (2,3,4,5,6,7,8,9,10,W,D,K,A) można taką metodą tasowania otrzymać talię z każdą inną kolejnością kart?

6. Kopalnia diamentów II

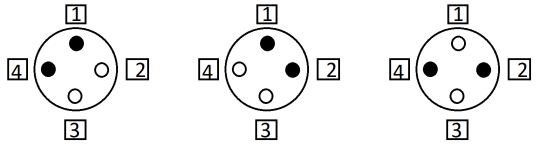
Ośmiu krasnoludków pracuje w kopalni diamentów. Kapryśna królowa nalicza od zebranych diamentów podatek w następujący sposób. Wybiera pewną parę krasnoludków i dzieli liczbę diamentów zebranych przez bardziej efektywnego krasnoludka przez liczbę diamentów zebranych przez drugiego krasnoludka z pary. Jeśli wynik nie jest liczbą całkowitą, to zostaje zaokrąglony w górę do liczby całkowitej. Następnie otrzymana liczba jest przemnażana przez 5. Wynik tych działań jest liczbą diamentów, którą królowa nalicza jako podatek.

Po skończonej zmianie okazało się, że każdy z krasnoludków zebrał przynajmniej jeden, ale nie więcej niż 250 diamentów. Każdy zebrał inną liczbę diamentów. Wykażcie, że w każdej sytuacji królowa może wskazać taką parę krasnoludków, że naliczy podatek równy 10.

7. Gra w kubki

Ciri i Geralt mają obrotowy, okrągły stół, wokół którego stoi 7 ponumerowanych krzeseł, w jednakowych odstępach. Przed każdym krzesłem stoi kubek. Niektóre kubki stoją denkami do góry. Ciri chce, by wszystkie stanęły normalnie (denkami w dół), a Geralt chce temu zapobiec. W związku z tym postanowili zagrać w taką grę. W każdej rundzie Ciri wybiera pewne numery krzeseł, przy których chciałaby zmienić pozycje kubków na przeciwną. Mówi te numery na głos. Geralt, znając je, najpierw robi obrót stołu, a dopiero potem na wybranych przez Ciri miejscach odwraca kubki. Ciri wygrywa, gdy po skończonej liczbie rund wszystkie kubki stoją normalnie; Geralt wygrywa, gdy ma sposób przeszkadzania Ciri w nieskończoność. Czy Ciri zawsze może wygrać, niezależnie od początkowego ustawienia kubków i ruchów Geralta? Jeśli tak, to podajcie strategię wygrywającą Ciri. Jeśli nie, to podajcie odpowiedni przykład początkowego ustawienia kubków i opiszcie strategię wygrywającą Geralta.

Przykład: Załóżmy, że są 4 krzesła, a kubki ustawiono jak na pierwszym rysunku (zamalowane kubki oznaczają kubki stojące denkami do góry). Przypuśćmy, że Ciri wskazała krzesła nr 1 i 4, a Geralt obraca stół o 90° w prawo. Wtedy rysunek środkowy pokazuje sytuację po obrocie stołu, zaś rysunek ostatni – po odwróceniu kubków.



8. Czworokąty

Na płaszczyźnie mamy 9 różnych punktów, których każda współrzędna należy do zbioru $\{1, 2, 3\}$. Nazwijmy je punktami bazowymi. Ile jest czworokątów (niekoniecznie wypukłych) o wszystkich wierzchołkach w punktach bazowych?

Przypomnienie: Czworokąt nie ma kątów wewnętrznych półpełnych.

9. Bellini, Cellini i synowie II

W warsztacie Bellinich i Cellinich, wytwarzającym zestawy szkatułek, pracuje Bellini z synem i Cellini z synem. W każdym zestawie są dwie szkatułki, złota i srebrna. Twórcą każdej szkatułki jest tylko jedna osoba, ale niekoniecznie obie szkatułki w zestawie są zrobione przez tę samą osobę lub tę samą rodzinę. Zgodnie z tradycją, Bellini i jego syn na każdej swojej szkatułce umieszczają jedno zdanie prawdziwe, a Cellini i jego syn – jedno zdanie fałszywe.

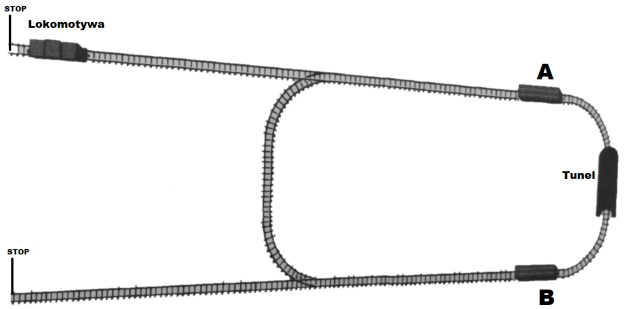
Logik oglądał w muzeum jeden z zestawów z warsztatu Bellinich i Cellinich. Wiadomo, że:

(i) Po obejrzeniu pierwszej szkatułki nie mógł wykluczyć jako twórcy żadnego z czterech pracowników warsztatu.

(ii) Przeczytawszy napis na drugiej szkatułce, zauważył, że jest on identyczny jak na pierwszej i wywnioskował, że obie szkatułki to dzieło Belliniego lub obie to dzieło Celliniego, ale nie sposób stwierdzić, którego z nich.

Jakie zdanie mogło być na szkatułkach? Podajcie przykład z uzasadnieniem.

10. Wagony



Wagony A i B oraz lokomotywa są ustawione jak na rysunku. Tunel jest na tyle wąski, że zmieści się w nim lokomotywa, ale nie wagony. Waszym zadaniem jest tak przetoczyć wagony A i B za pomocą lokomotywy, by zamieniły się miejscami, a lokomotywa wróciła do położenia początkowego. Lokomotywa może pchać lub ciągnąć, wagony mogą być spięte razem. Podłączanie i odłączanie wagonów może być wykonane tylko wtedy, gdy lokomotywa jest zatrzymana. Niepodłączony wagon nie jedzie. Operacją nazywamy dowolny ruch pomiędzy zatrzymaniami lokomotywy. Czy da się wykonać zadanie za pomocą co najwyżej 20 operacji?

Uwaga: W sytuacji na rysunku na skrzyżowaniu lokomotywa musiałaby jechać prosto, ale gdyby do skrzyżowania dojechała od prawej, mogłaby jechać prosto lub po łuku.