Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA
VIII EDYCJA KONKURSU

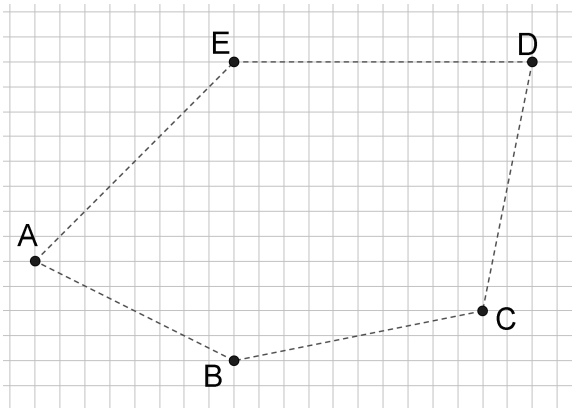
finał dla szkół podstawowych
21 maja 2021

© Hanna Kuik

Czas pracy to 90 minut. Powodzenia!

1. Place zabaw

W pewnym mieście jest pięć placów zabaw dla dzieci. Ich położenie zobrazowano na poniższym rysunku (punkty A, B, C, D i E).



Na rysunku dodano linie siatki i odcinki ukazujące odległości między placami zabaw (w linii prostej).
Można założyć, że place zabaw znajdują się w punktach kratowych siatki, a odcinek siatki ma długość 1 km.

Władze miasta podjęły decyzję o utworzeniu kolejnego placu zabaw. Zdecydowano, że powinien powstać w centrum miasta (obszar ograniczony pięciokątem na rysunku), możliwie jak najdalej od już istniejących.

Gdzie powinien znajdować się nowy plac zabaw? Uzasadnij, że odległość większa być nie może.

Wskazówka.
Za miarę odległości danego placu zabaw od wszystkich innych placów zabaw przyjmij jego odległość od najbliższego mu placu zabaw.
Na przykład dla placu zabaw A ta wartość to $\sqrt{80}$ (odległość od placu B), a dla placu C ta wartość to $\sqrt{104}$ (odległość od placu B, jak i odległość od placu D).

2. Aleja eukaliptusowa

Miś koala przemieszcza się każdego kolejnego dnia z drzewa na drzewo w poszukiwaniu drzewa o coraz większej liczbie liści eukaliptusowych.

Zakładamy, że drzewa są rozmieszczone jak na rysunku, a koala nigdy nie cofa się, czyli wędruje na południe (jak to pokazuje strzałka).

Uwaga. Liczby w kółkach to liczby liści na drzewach.

Celem koali jest odwiedzenie jak największej liczby drzew z pysznymi liśćmi.

Które z drzew koala powinien wybrać jako pierwsze? Które drzewa powinien wybierać podczas kolejnych dni wędrówki? Odpowiedź uzasadnij.

3. Kontrola parzystości

Do cyfrowego zapisu informacji używa się czasami większej liczby bitów, niż to się wydaje konieczne. Celem jest umożliwienie wykrycia błędu odczytu danych (tj. odczytu wartości 0 zamiast 1 albo odwrotnie), a czasem i jego skorygowania (naprawienia błędu).

W pamięciach niektórych superkomputerów stosuje się algorytm zwany dwuwymiarową kontrolą parzystości.

Tego typu algorytm działa następująco:

– Bity danych dzieli się na grupy po trzy.

– Do każdej trójki bitów dodaje się jeden bit zwany bitem parzystości. Chcemy, aby wśród tych czterech bitów wartość 0 pojawiła się parzystą liczbę razy (cztery razy, dwa razy albo wcale).

Przykład.
Trzy grupy bitów `101 111 000` będą zakodowane tak:

```
1 0 1 | 0
1 1 1 | 1
0 0 0 | 0
```

– Po zakodowaniu dziewięciu bitów danych w opisany sposób dodaje się cztery dodatkowe bity kontrolne. Można je sobie wyobrazić jako bity parzystości odpowiednich trójek bitów w kolumnie.

Przykład.
Do 12 bitów uzyskanych w poprzednim kroku algorytmu dodaje się cztery bity w dodatkowym wierszu:

```
1 0 1 | 0
1 1 1 | 1
0 0 0 | 0
---------
0 1 0 | 1
```

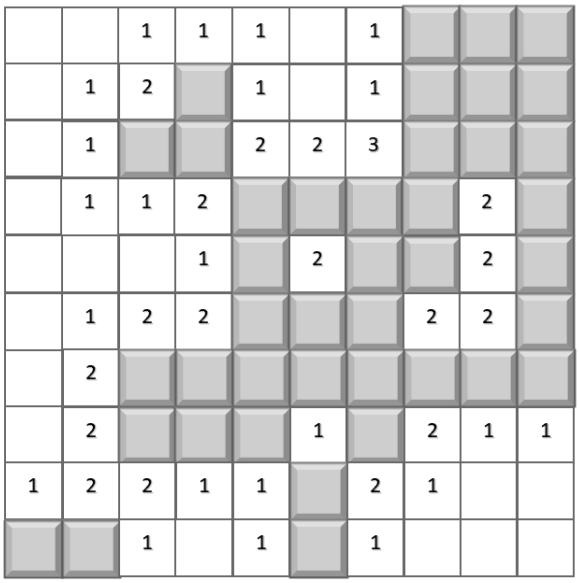
Bity danych będą więc ostatecznie zakodowane z użyciem 7 nadmiarowych bitów: 101**0** 111**1** 000**0** **0101**.

Uzasadnij, że jeśli podczas odczytu danych doszło do jednego przekłamania (zamiany 0 na 1 albo odwrotnie), to taki błąd da się na wykryć i skorygować. Przyjmij, że ryzyko wystąpienia przekłamania jest identyczne dla każdego z 16 bitów.

Uwaga.
Dla uproszczenia wywodu przyjęto założenie, że liczba bitów informacji jest wielokrotnością liczby 9. Gdy tak nie jest, to algorytm nadal można stosować. Wystarczy uzupełnić bity informacji o odpowiednią liczbę zer.

4. Koala gra w Sapera

Pewien miś koala postanowił zagrać w Sapera. Niestety, rozpoczynając grę przez roztargnienie zapomniał spojrzeć, jaki wariant gry wybiera (liczba min) i teraz, na pewnym etapie gry, zastanawia się nad tym.



Uwaga. Na rysunku pola nieodkryte są zacieniowane.

Pomóż misiowi ustalić, ile najwięcej i ile najmniej min może znajdować się na tej planszy.

Dla przypomnienia – cel i zasady gry w sapera:

– Celem gry jest odnalezienie wszystkich min znajdujących się na planszy i oznaczenie ich flagą, bądź odsłonięcie wszystkich pól, które nie skrywają miny.

– Wygrywa zawodnik, któremu uda się określić położenie wszystkich min.

– Jeżeli gracz odsłoni pole, pod którym ukryta jest mina, to gra kończy się porażką.

– Na każdym polu jest co najwyżej jedna mina.

– Na każdym z odkrytych pól zapisana jest liczba, która informuje o tym, ile jest min na polach, które stykają się z danym polem, choćby rogiem. Jeśli wokół odkrytego pola nie ma min, to na polu nie ma wpisanej liczby.

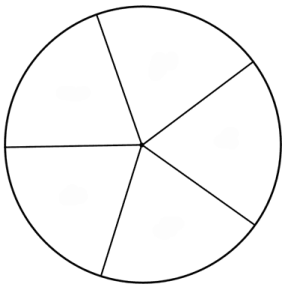
– Gdy odkrywamy pola bez min, to na nich też mogą pojawić się liczby.

– Na planszy musi znajdować się informacja liczbowa o każdej minie.

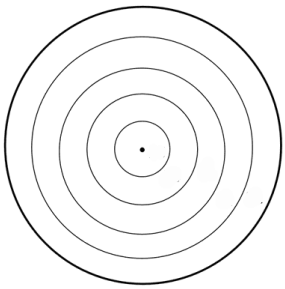
5. Turniej strzelecki

W pewnym turnieju strzeleckim tarcza została podzielona na pięć sektorów (Rys. 1) i pięć pierścieni (Rys. 2), co ostatecznie daje 25 pól.

Rys. 1.

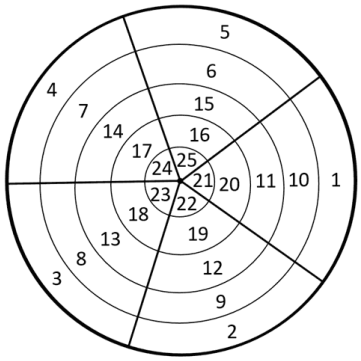


Rys. 2.



Do każdego pola została przypisana liczba punktów, które zawodnik dostaje, gdy w to pole trafi (Rys. 3).

Rys. 3.



Zasady turnieju są następujące:

– Każdy zawodnik oddaje serię 5 strzałów i za każdym razem musi trafić w tarczę.

– W każdy sektor może trafić tylko raz.

– W każdy pierścień może trafić tylko raz.

Naruszanie którejkolwiek z powyższych zasad skutkuje przyznaniem zawodnikowi 0 punków za całą serię.

– Za trafienie w sam środek tarczy lub w linię pomiędzy polami przyznaje się 0 punktów (za strzał).

– Wygrywa zawodnik z największą liczbą punktów, czyli największą sumą punktów uzyskanych za trafienia w poszczególne pola.

Ile najwięcej punktów może uzyskać zwycięzca?
Ile jest różnych wyborów pól przez zawodnika, dających tę liczbę punktów?

Odpowiedź uzasadnij.

6. Zadanie z potęgą

Ania, Kasia, Tomek i Wojtek, jako kapitan, brali udział w konkursie matematyczno-informatycznym. Treść jednego z zadań była następująca:
Rozstrzygnij, czy wśród liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba, której dziesiąta potęga w zapisie dziesiętnym jest liczbą 10-cyfrową o każdej cyfrze innej.

Ania, Kasia, Tomek i Wojtek analizując zadanie doszli do słusznego przekonania, że jest co najwyżej jedna liczba spełniająca warunki zadania. Posłużyli się komputerem, aby wyznaczyć 10. potęgę tej liczby.

Dla jakiej liczby jej potęgę obliczali na komputerze? Odpowiedź uzasadnij.

7. Skąd pochodzą misie koala

W zoo przebywa pięć misiów koala: Miś Aleks, Miś Bartek, Miś Eryk, Miś Frank i Miś Gutek.
Każdy z nich pochodzi z innego regionu Australii.

Wiadomo, że:

– Miś Aleks pochodzi z Północnego Queensland albo z Nowej Południowej Walii;

– Miś Bartek pochodzi z Australii Południowej albo z Wiktorii;

– Miś Eryk pochodzi z Południowego Queensland albo z Wiktorii;

– Miś Frank pochodzi z Australii Południowej albo z Północnego Queensland;

– Miś Gutek pochodzi z Północnego Queensland albo z Wiktorii.

Wiemy jeszcze, że następujące zdanie jest fałszywe: Miś Bartek pochodzi z Australii Południowej, a Miś Gutek pochodzi z Wiktorii.

Na podstawie powyższych informacji ustal pochodzenie każdego z misiów.

8. Kapelusze

Wyobraź sobie 8 koali z kapeluszami na głowach. Następnie wyobraź sobie, że misie zamieniają się kapeluszami. Żaden nie może zostać ze swoim kapeluszem.

Ile jest różnych sposobów przydziału kapeluszy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga.
Proces zamieniania się kapeluszami można wyobrazić sobie tak, że koale odkładają kapelusze na wieszaki i każdy z misiów wybiera jeden z kapeluszy, ale nie swój.

9. Gra jednoosobowa

Koala jest fanem jednoosobowych gier planszowych. Miś bawi się grą, w której wygrana polega na przemieszczeniu – o ile to tylko możliwe – wszystkich pionków z pól planszy na pole o etykiecie 0.

Reguły gry są następujące:

– Pionki na danym polu planszy pozostają zablokowane (nie można ich przenosić) dopóki liczba pionków na tym polu jest różna od liczby, która jest etykietą tego pola.

– Ruch gracza polega na usunięciu wszystkich pionków z niezablokowanego pola planszy i przeniesieniu po jednym pionku na każde z pól o niższej etykiecie.

– Jeśli niezablokowanych pól jest więcej, to gracz może wybrać dowolne pole.

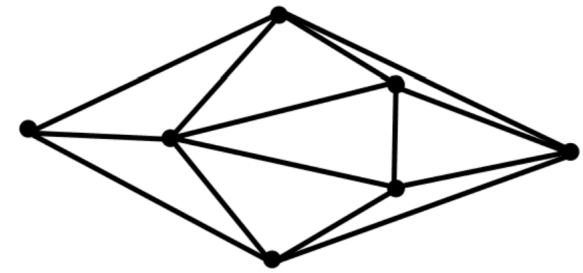
Czy koala może wygrać w grze o początkowym ustawieniu pionków jak na poniższym rysunku?

					o		
				o	o		
	o	o	o	o	o		
				o	o		
					o		
0	1	2	3	4	5	6	7

Jeśli tak, to podaj przebieg zwycięskiej gry.
Jeśli nie może wygrać, to uzasadnij dlaczego.

10. Owca i niecierpliwy wilk

Na poniższym grafie wilk ściga owcę. W pierwszym ruchu wilk staje na wybranym wierzchołku. Owca wybiera inny wierzchołek. W kolejnych ruchach wilk przesuwa się do sąsiedniego wierzchołka, a owca może postąpić dwojako: zostać tam, gdzie jest albo przesunąć się do sąsiedniego wierzchołka.



Ruchy wilka i owcy są wykonywane na przemian: najpierw wilk, a potem owca.

Wilk zjada owcę, gdy znajdą się w tym samym wierzchołku.

Jaka jest najmniejsza liczba ruchów wilka, gwarantująca zjedzenie nawet bardzo sprytnej owcy?

Jaką pozycję powinien zająć wilk i jak łapać owcę?

Nie zapomnij o uzasadnieniu, że mniejsza liczba ruchów nie wystarczy, tzn. mądra owca może wilkowi uciec.