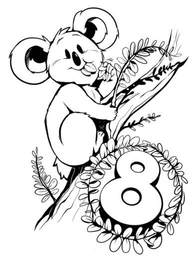
Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

VIII edycja
2021

I etap
szkoły ponadpodstawowe



© Hanna Kuik

1. Prosimy zapoznać się z regulaminem konkursu, dostępnym na stronie http://koala.poznan.pl/
2. Z organizatorami można się kontaktować, pisząc na adres koala.konkurs@gmail.com. Kontakt jest wskazany zwłaszcza w przypadku wątpliwości co do interpretacji treści jakiegoś zadania.
3. Rozwiązania wszystkich zadań należy zapisać w języku polskim i oddać opiekunowi na przechowanie (może być skan lub czytelne zdjęcia).
4. Każda seria składa się z pięciu zadań.
5. Odpowiedzi do zadań każdej serii prosimy przesyłać w podanym terminie, poprzez stronę internetową.
6. Zadania wersji programistycznej konkursu znajdują się na ostatniej stronie.

I seria zadań

do 28 stycznia 2021

1. Kradzież

Z kuchni w zoo skradziono bambusowe deski do krojenia. Jedynymi podejrzanymi są: koala, kangur, diabeł tasmański i panda. W trakcie dochodzenia ustalono następujące fakty:

- Jeśli koala dokonał kradzieży, to miał dokładnie trzech wspólników.
- Jeśli kangur dokonał kradzieży, to miał dokładnie jednego wspólnika.
- Jeśli diabeł tasmański dokonał kradzieży, to wspólnie z pandą.

Co można powiedzieć o winie każdego ze zwierząt na podstawie tych informacji?

Za winnego uważamy zarówno zwierzaka, który ukradł deski, jak i każdego jego wspólnika. Wzór zapisu odpowiedzi (to tylko wzór, nie rozwiązanie): koala: winny, kangur: winny, diabeł tasmański: niewinny, panda: nie wiadomo

2. Bal karnawałowy

Jest karnawał. Dziesięcioosobowa grupa przyjaciół, 5 dziewcząt i 5 chłopców, postanowiła wybrać się na bal karnawałowy. Otrzymali 5 zaproszeń dla 5 par. I tu pojawił się problem – jak dobrać się w pary? Chłopcy okazali się dżentelmenami i zadeklarowali, że zgadzają się na każdą propozycję ze strony koleżanek, ale po stronie dziewcząt już nie wszystko było takie proste. Jedna z dziewcząt Ania zaproponowała, że przedstawi propozycję doboru przyjaciół w pary tak, aby wszyscy byli zadowoleni. Zanim jednak Ania zgodziła się podjąć tego zadania, postawiła warunek, że każda z dziewcząt (ona też) musi przedstawić swoje preferencje, tzn. musi wymienić przynajmniej dwóch spośród kolegów, którzy mogliby być jej partnerami na balu. Dziewczęta zgodziły się, a ich deklaracje przedstawiały się następująco:

- Ania powiedziała, że może pójść w parze z Mariuszem albo Jankiem, albo Grzegorzem.
- Basia – z Krzysztofem albo Jankiem.
- Natalia – z Mariuszem albo Grzegorzem.
- Daria – z Mariuszem albo Piotrem.
- Hania – z Krzysztofem albo Jankiem, albo Piotrem.

Jak Ania mogła dobrać przyjaciół w pary, jeśli wiadomo, że wszyscy poszli na bal w parach i wymagania dziewcząt zostały spełnione? Wypisz wszystkie możliwości.

Wzór zapisu odpowiedzi (to tylko wzór, nie przykładowe rozwiązanie): 1. AK, BM, NJ, DP,HG; 2. AM, BK, NJ, DP, HG
Należy podać pierwsze litery imion w parach, w parze dziewczyna jest zawsze wymieniona jako pierwsza.

3. Kopalnia diamentów

Ośmiu krasnoludków pracuje w kopalni diamentów. Poniższa tabelka pokazuje, ile każdy z nich zebrał dzisiaj diamentów:

Mędrek	Gburek	Apsik	Wesołek	Gapcio	Nieśmiałek	Śpioszek	Zadziorek
135	90	25	100	30	275	10	65

Zła królowa pobiera za zebrane diamenty podatek. Krasnoludki chodzą do królowej parami. Dla każdej pary królowa dzieli liczbę diamentów zebranych przez bardziej efektywnego krasnoludka przez liczbę diamentów zebranych przez drugiego krasnoludka z pary. Jeśli wynik nie jest liczbą całkowitą, to zostaje zaokrąglony w górę do liczby całkowitej. Następnie otrzymana liczba jest przemnażana przez 5. Wynik tych działań wyznacza liczbę diamentów, które królowa zabiera od danej pary. Mędrek podzielił krasnoludki na takie cztery rozłączne pary, aby łączny podatek zapłacony przez całą ósemkę był jak najmniejszy. Jak dużo diamentów krasnoludki musiały zapłacić królowej?

Przykład: Przypuśćmy, że krasnoludki podzieliłyby się na takie 4 pary: Mędrek z Gburkiem, Gapcio z Wesołkiem, Apsik z Nieśmiałkiem i Śpioszek z Zadziorkiem. Wtedy te pary zapłaciłyby kolejno: $\lceil\frac{135}{90}\rceil \cdot 5 = 10$, $\lceil\frac{100}{30}\rceil \cdot 5 = 20$, $\lceil\frac{275}{25}\rceil \cdot 5 = 55$ i $\lceil\frac{65}{10}\rceil \cdot 5 = 35$ diamentów. Zatem łączny podatek to $10 + 20 + 55 + 35 = 120$ diamentów.

4. Deszyfrowanie

W XX w. wielu dyplomatów, wojskowych i szpiegów używało kolumnowego szyfru przestawieniowego. Szyfrogram powstaje przez zmianę kolejności znaków w tekście jawnym, zawiera więc wszystkie znaki tekstu jawnego. Proces szyfrowania tą metodą można przedstawić w następujących krokach:

1) Tekst jawny należy odpowiednio przygotować, tj. cały tekst należy zapisać używając wyłącznie drukowanych wielkich liter, usuwając przy tym wszelkie odstępy i znaki niebędące literami bądź cyframi.
2) Należy przygotować tzw. klucz i tabelę – liczbę kolumn w tabeli określa długość klucza. Klucz jest ciągiem liczb złożonym z n niepowtarzających się dodatnich liczb naturalnych, mniejszych lub równych n. Liczba n jest większa od 1 i mniejsza lub równa długości tekstu jawnego.
3) Tekst jawny wprowadzany jest znak po znaku do kolejnych wierszy tabeli, w kierunku od lewej do prawej.
4) Należy przeczytać kolumnami tekst z tabeli, przy czym klucz określa kolejność odczytywania kolumn.

Przykład: Szyfrogram tekstu „Ósma edycja konkursu Koala”, zaszyfrowanego metodą kolumnową, z kluczem: 3 4 1 6 2 5, ma postać: MJUAAARLÓYNKDOUSCKOEKSA.

Odszyfrujcie szyfrogram:

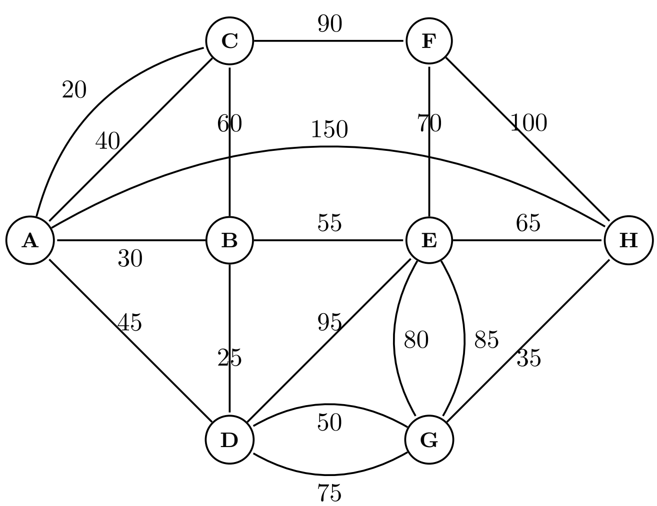
BYZAZMUKEWPCTTAZIMOYTRAIWNIMWRMYÓTÓYJEKYWTAPTESIKAIAATŁWRKĄMNADMEAJTRZAEĘ

wiedząc, że do zaszyfrowania tekstu wykorzystano tutaj klucz: 5 1 7 9 2 6 10 3 8 4.

Jako odpowiedź należy podać tylko cztery znaki tekstu odszyfrowanego: pierwszy, drugi, przedostatni i ostatni znak, zapisując je jeden za drugim, w podanej kolejności (i bez odstępu).

5. Building bridges

The Eucalyptus Archipelago consists of eight islands. The new governor of this archipelago promised during his election campaign that he will connect all the islands by new bridges. Now he has to fulfill his promise so various architects started sending him their proposals. On the sketch the circles represent the islands of the Eucalyptus Archipelago and the lines the possible bridges. The numbers are the estimated costs of the bridges (in millions of dollars).



Now, the governor has to choose which bridges will be built. Not every pair of islands has to have a bridge between them, but it has to be possible to walk from any island to every other island (maybe through some other islands). The governor also wants to spend as little money as possible. Which bridges should be built?

For each bridge in your answer write the names of two islands it connects and its cost, e.g. AB 30.

do 4 lutego 2021

6. Sejfy

W pewnym teleturnieju są trzy sejfy: złoty, szary i oliwkowy. W dokładnie jednym z nich jest złoty naszyjnik dla zwycięzcy. Aby wygrać, należy odgadnąć, w którym sejfie jest nagroda. Dla ułatwienia na wiekach sejfów umieszczono następujące zdania:

Sejf złoty: Nagrody tu nie ma. Naszyjnik pochodzi z Włoch.

Sejf szary: Nagrody nie ma w sejfie w kolorze złotym. Naszyjnik pochodzi z Francji.

Sejf oliwkowy: Nagrody tu nie ma. Naszyjnik jest w szarym sejfie.

Uczestnikowi teleturnieju wyjaśniono, że na żadnym wieku nie ma dwóch zdań fałszywych. Aby wygrać, zawodnik musi wskazać sejf z naszyjnikiem. Który powinien wybrać?

7. Kino

Pewien kinoman bierze udział w wyjątkowym maratonie filmowym. W programie podano wyłącznie godziny rozpoczęcia i zakończenia każdego filmu. Nie są znane nawet gatunki filmów. Kinoman chce zobaczyć tyle filmów (w całości), ile tylko to będzie możliwe. Filmy są wyświetlane w sześciu salach kina. Oto program maratonu filmowego:

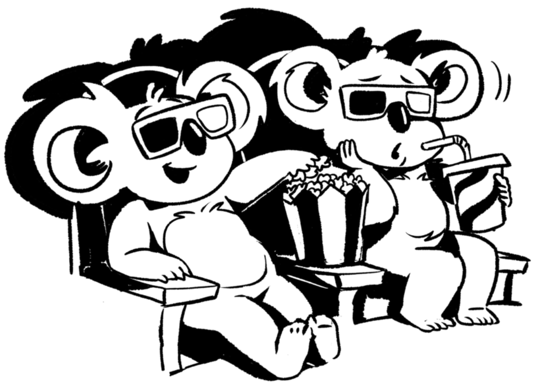
sala 1	sala 2	sala 3	sala 4	sala 5	sala 6
10:00–11:00	10:00–11:30	10:00–11:30	10:00–11:30	10:00–12:00	10:00–12:00
12:00–15:00	12:30–13:30	12:30–13:30	12:30–14:00	13:00–14:30	14:30–16:00
16:00–18:00	14:00–15:00	15:00–15:30	15:00–16:00	15:30–17:00	16:30–18:00
	17:00–18:30	16:30–18:30	17:00–18:30	17:30–18:00	

Kinoman, przeglądając program festiwalu, postanowił posłużyć się następującą strategią przy wyborze filmów: Wybierz film, który trwa najkrócej, a jeśli jest takich więcej, to wybierz z nich ten, który się najwcześniej kończy. Jeśli jest więcej takich filmów, wybierz dowolny z nich. Następnie wykreśl wszystkie filmy, które kolidują z wybranym. I powtórz procedurę wyboru dla pozostałych filmów, jeśli to możliwe.

Uwaga: Na przejście między salami potrzeba kilku minut, których nie można pominąć.

Czy da się obejrzeć więcej filmów niż liczba uzyskana wg opisanej strategii kinomana? Jeśli tak, to ile najwięcej?

Jako odpowiedź podajcie *nie*, jeśli nie można obejrzeć więcej niż kinoman; w przeciwnym przypadku podajcie największą liczbę filmów.



8. Plus – minus

W każde pole tabliczki o siedmiu wierszach i siedmiu kolumnach miś koala wpisał albo -1, albo 1, w taki sposób, że suma wszystkich wpisanych liczb jest równa 1. Oto tabliczka koali:

1	-1	1	1	-1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1

Następnie miś wyznaczył sumy liczb dla każdego wiersza (począwszy od góry) i dla każdej kolumny (począwszy od lewej) i zapisał te 14 liczb w ciągu, jedna za drugą: 3, -3, 3, 1, -1, 1, -3, 3, -7, 5, 1, -7, 5, 1.

Po chwili namysłu postawił sobie następujące pytanie: Czy liczb ujemnych w ciągu może być więcej, jeśli do pól tabeli wpiszę inny układ -1 i 1, które w sumie dają 1? Pomóż koali znaleźć odpowiedź na to pytanie.

Ile najwięcej w ciągu koali może być liczb ujemnych przy zachowaniu warunków zadania?

9. Przekładaniec

Ułóżcie trzy złotówki i dwie dwuzłotówki na przemian w rzędzie, dokładnie tak jak na obrazku (a). Ruch polega na przesunięciu dwóch stykających się monet o różnych nominałach na inne miejsce w rzędzie, przy czym obowiązują takie zasady:

- Obie przesuwane monety muszą nadal się stykać i pozostać w tej samej kolejności.
- Pozostałe monety pozostają na swoich miejscach i nie można ich przesuwać, np. zsuwać po powstaniu luk.
- Cały rząd może zmienić położenie, w trakcie przesuwania mogą powstawać luki w układzie, np. takie jak na rysunku (c), gdzie pierwsza luka może pomieścić dwie monety, a druga trzy.

Wykonując jak najmniej ruchów, doprowadźcie do układu, w którym złotówki zajmują trzy pierwsze miejsca w rzędzie, a dwuzłotówki – dwa kolejne, dokładnie tak jak na obrazku (b). Ile ruchów wykonaliście?

Nazwijmy rozpiętością układu odległość między pierwszą a ostatnią monetą w układzie, mierzoną średnicą monety (np. rozpiętość układu początkowego to 4, a rozpiętość układu z rysunku (c) to 9). Rozpiętością serii ruchów nazwijmy największą z rozpiętości wszystkich układów powstających po drodze (czyli jeśli np. rozpiętości układów powstających w kolejnych krokach to: 4, 5, 6, 7, 9, 6, 7, 4, to rozpiętość całej serii wynosi 9). Spośród możliwych rozwiązań o minimalnej liczbie ruchów wybierzcie to, dla którego rozpiętość jest najmniejsza. Ile wynosi ta rozpiętość?

Jako odpowiedź podajcie dwie liczby: liczbę ruchów i rozpiętość.


(a)


(b)


(c)

10. Base

We write down a sequence defined as follows. The first term is 1. In order to calculate each next term after that write down ternary expansions (expansion in base 3) of all the previous terms of the sequence – the total number of digits used in those numbers is the next term of the sequence. What is the first positive power of 3 that does not appear in the sequence?

In the answer give the power of 3, not the exponent.

do 11 lutego 2021

11. Urodziny

Paweł i Rafał chcieliby poznać datę urodzin Kasi, ale znają tylko jej rok urodzenia: 2002. Aby mieli szansę poznać pozostałe dwie liczby w jej dacie urodzin, Kasia oznajmiła, że Pawłowi zdradzi na ucho tylko pierwszą liczbę (dzień miesiąca), zaś Rafałowi – tylko drugą (miesiąc). Jak powiedziała, tak zrobiła. Potem dodała głośno, że pierwsza liczba nie jest większa od drugiej. Wtedy między Pawłem a Rafałem, którzy są z logiką za pan brat, a do tego zawsze mówią prawdę, potoczyła się taka rozmowa:

— Nie wiesz, jaka jest data urodzin Kasi. — oznajmił Paweł.
— To prawda, ale i ty nie znasz daty urodzin Kasi. — powiedział Rafał.
— Tak, a ty nadal nie znasz tej daty. — powiedział Paweł.
— W takim razie teraz już znam datę urodzin Kasi. — oznajmił Rafał.
— Ja też. — rzekł Paweł.

Kiedy urodziła się Kasia?

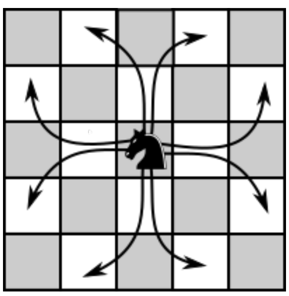
12. Domowe zoo

Piekielny Piotruś hoduje w domu karakala, mangustę, węża, gołębia, mysz i kraba. Chce je umieścić w sześciu klatkach: czerwonej, niebieskiej, zielonej, pomarańczowej, fioletowej i żółtej. Każda klatka może pomieścić dowolną liczbę zwierząt, ale może też zostać pusta. Niektóre zwierzęta w hodowli Piotrusia zjadają inne: mangusta lubi węże, myszy i kraby, wąż nie pogardzi przekąską z myszy lub gołębia, a karakal może zjeść mangustę, węża, mysz i gołębia. Z tego powodu rozmieszczenie musi być dobre, to znaczy w żadnej klatce nie może być pary zwierząt, z których jedno zjada drugie. Ile jest dobrych rozmieszczeń dla zoo Piekielnego Piotrusia?

Przykład: Gdyby Piotruś miał kota, szczurka, mysz i koalę, to trzy z wielu dobrych rozmieszczeń byłyby takie:
1) kot i koala w czerwonej klatce, szczurek i mysz w niebieskiej;
2) kot i koala w niebieskiej klatce, szczurek i mysz w czerwonej;
3) kot w czerwonej klatce, szczurek i koala w niebieskiej, mysz w zielonej.

13. Skoczek

Skoczek, poruszając się na szachownicy o wymiarach 8×8, w każdym ruchu może przesunąć się tylko w określony sposób: albo dwa pola w pionie, a następnie jedno w prawo lub lewo, albo dwa pola w lewo lub prawo, a następnie jedno w górę lub dół. Poniższy rysunek ilustruje zasady ruchu skoczka.



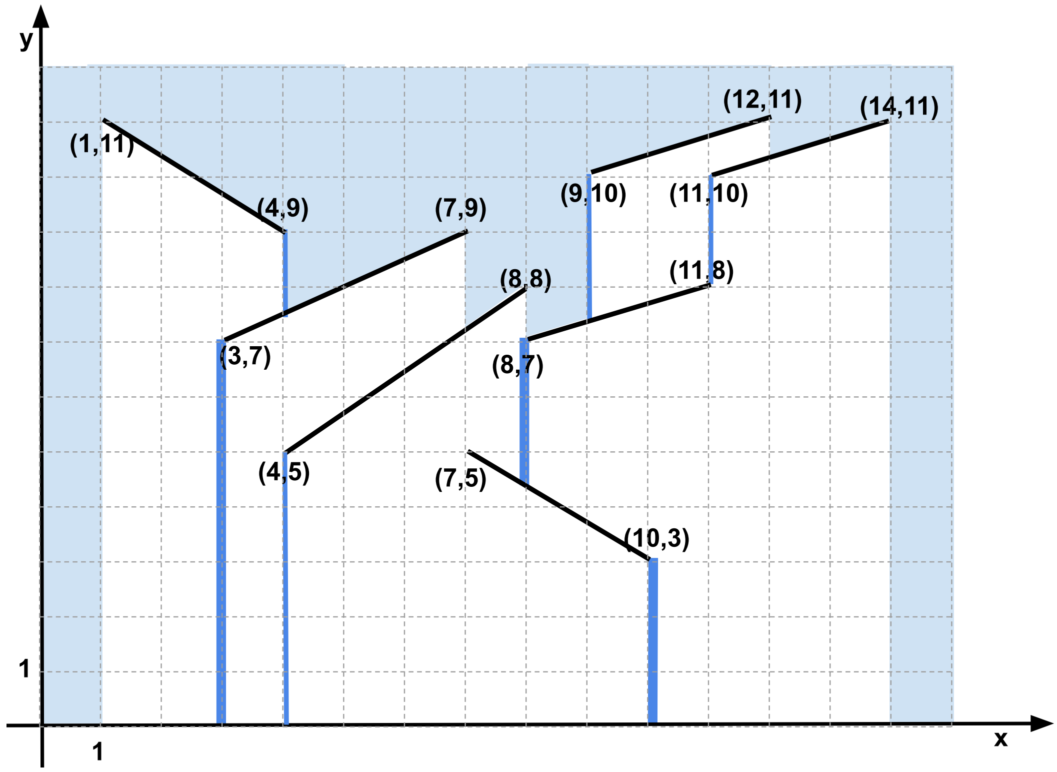
Wiersze szachownicy są oznaczone kolejno liczbami od 1 do 8, zaś kolumny – literami od A do H. Skoczek rozpoczyna podróż na polu A8 (w lewym, górnym narożniku), kończy na polu H1 (w narożniku przeciwległegłym), nie musi odwiedzić wszystkich pól szachownicy, ale musi po drodze stanąć przynajmniej raz na każdym innym polu przekątnej wyznaczonej przez narożniki A8 i H1. Ile ruchów liczy najkrótsza taka podróż? Czy jest w ogóle możliwa?

Jeśli podróż jest możliwa, podajcie jako odpowiedź najmniejszą liczbę ruchów; w przeciwnym wypadku podajcie jako odpowiedź *nie*.

Uwaga: Zakładamy, że na początkowym polu A8 skoczek już stanął. Zakładamy też, że robiąc ruch, skoczek staje tylko na polu docelowym, np. w pozycji na rysunku skoczek ma do wyboru 8 pól, na których może stanąć.

14. Ściana wodna

Rysunek poniżej ukazuje projekt ściany wodnej, umieszczony w układzie współrzędnych OXY. Ze szczytu ściany na długości 15 m wypływa ze stałą szybkością 15 l wody w ciągu sekundy, rozłożone równomiernie. Znaczna część wody trafia do pochyłych rynien, które na rysunku są przedstawione jako odcinki. Woda spływa rynnami i dalej spada pionowo w dół, aż do napotkania kolejnej rynny lub osiągnięcia ziemi, w której znajduje się odpływ.



Wyznaczcie liczbę litrów wody, która spływa z poszczególnych rynien w ciągu sekundy.

Jako odpowiedź podajcie siedem liczb. Przy podawaniu odpowiedzi przyjmijcie, że rynny są uporządkowane względem odciętych (współrzędnej x) początku rynny.

15. Hungry Koalas

Two players play the following game. The game is played on a line of n cells with each player having unlimited amount of pieces of two kinds: Koala piece and Eucalyptus piece (both players use identical pieces). Players take their turns alternately. In each turn player places one of their pieces in an empty cell.

The goal is to get three consecutive cells with Koala piece surrounded by two Eucalyptus pieces. The first player to create such a configuration wins; if there is no such configuration at the end, then there is a draw.

(a) What will be the result of the game if $n = 31$ and both players play perfectly?
(b) What will be the result of the game if $n = 30$ and both players play perfectly?
(c) Suppose that $n = 21$, in the first five moves players put Koala pieces on cells: 3, 11, 19 and Eucalyptus pieces on cells 7, 15. What will be the result of the game if both players are going to play perfectly from now on?
(d) Suppose that $n = 21$ in the first four moves players put Koala pieces on cells: 17, 18 and Eucalyptus pieces on cells 3, 6. What will be the result of the game if both players are going to play perfectly from now on?
(e) Suppose that $n = 20$ in the first four moves players put Koala pieces on cells: 17, 18 and Eucalyptus pieces on cells 3, 6. What will be the result of the game if both players are going to play perfectly from now on?

Wzór zapisu odpowiedzi (to tylko wzór, nie rozwiązanie):
(a) pierwszy wygra (b) pierwszy wygra (c) drugi wygra (d) drugi wygra (e) remis

Zadania programistyczne

Przypominamy, że punkty za zadania programistyczne nie liczą się do klasyfikacji głównej (nieprogramistycznej) konkursu. Prosimy o zapoznanie się z regulaminem.

Instrukcja

1. Prosimy zapoznać się z przykładem zadania i jego rozwiązaniem w języku Python 3, które zamieszczono poniżej. Ukazano tam zalecany sposób wczytywania danych do programu i zapisywania wyniku działania programu.
2. Rozwiązania zadań (teksty programów w języku Python 3 lub C++) należy przesyłać w podanych terminach poprzez stronę internetową konkursu.
3. Do uruchamiania rozwiązań w języku Python używany będzie interpreter Python 3.7. Do kompilowania rozwiązań w języku C++ używany będzie kompilator G++ 8.3.
4. Rozwiązania powinny czytać dane ze standardowego wejścia i zapisywać wynik na standardowe wyjście, chyba że dla danego zadania wyraźnie napisano inaczej.

Przykład. Przeliczanie temperatur

Napisać program, który będzie przeliczać ciąg wartości temperatur zapisanych w skali Fahrenheita na odpowiadające im wartości w skali Celsjusza.

Przyjmujemy, że wartości temperatur w skali Fahrenheita będą wyrażone liczbami całkowitymi. Odpowiadające im wartości temperatur w skali Celsjusza program powinien wyznaczyć z dokładnością do części całkowitej.

Przykładowe dane

```
40 50 60 70 80 90 100
```

Przykładowy wynik

```
4 10 15 21 26 32 37
```

Tekst programu (w języku Python 3)

```
# wczytanie danych
listaF = []
for x in input().split():
    listaF.append(int(x))

# przeliczenie temperatur
listaC = []
for x in listaF:
    listaC.append(int((x-32)*5/9))

# wypisanie wyniku
for y in listaC:
    print(y, end=" ")
```

Zadanie P-4. Deszyfrowanie

termin: do 28 stycznia 2021

Napiszcie program, który odszyfruje dany szyfrogram uzyskany metodą kolumnowego szyfru przestawieniowego, dla którego zastosowano dany klucz. Program powinien wypisać odszyfrowany tekst jako jeden scalony ciąg znaków.

Uwaga: Przyjmijcie, że tekst szyfrogramu nie zawiera polskich znaków diakrytycznych oraz, że liczby tworzące klucz szyfrowania są wprowadzane do programu jako ciąg liczb oddzielonych pojedynczą spacją.

Przykładowe dane

```
CLGWRZIOEOSEWNGKZSEOOU
3 4 1 2
```

Przykładowy wynik

```
SZCZESLIWEGONOWEGOROKU
```

Zadanie P-10. Rozwinięcia

termin: do 4 lutego 2021

Napiszcie program, który dla zadanej liczby naturalnej $2 \leqslant k \leqslant 16$ wyznacza najmniejszą potęgę liczby k (program powinien zwracać potęgę, a nie wykładnik), która *nie* występuje w ciągu zdefiniowanym poniżej:

- Pierwszy wyraz ciągu jest równy 1.
- Aby wyznaczyć kolejny wyraz, należy zapisać najpierw wszystkie poprzednie wyrazy ciągu w systemie liczbowym o podstawie k. Liczba cyfr potrzebnych do ich zapisania to kolejny wyraz ciągu.

Przykładowe dane	*Przykładowy wynik*
`5`	`125`

Zadanie P-14. Ściana wodna

termin: do 11 lutego 2021

Załóżmy, że – tak jak w zadaniu 14 – ze szczytu ściany na długości 15 m wypływa ze stałą szybkością 15 l wody w ciągu sekundy, rozłożone równomiernie. Dana jest dodatnia liczba całkowita $n \leqslant 10$, oznaczająca liczbę rynien oraz $2n$ par liczb całkowitych, z zakresu od 1 do 14, określających położenie rynien. Każde kolejne dwie pary liczb dotyczą jednej rynny: pierwsza para określa współrzędne (x, y) początku rynny, a druga para – współrzędne (x, y) końca tej rynny.

Napiszcie program, który wyznacza liczbę litrów wody, która spływa z poszczególnych rynien w ciągu sekundy.

Przyjmijcie, że wśród rynien nie ma dwóch takich, które mają jakikolwiek punkt wspólny. Nie ma dwóch takich, które miałyby tę samą odciętą (współrzędną x) początku rynny, ani nie ma dwóch takich rynien, które miałyby tę samą odciętą końca rynny.

Przykładowe dane

```
 5
 1 12  5  9
 3  7  8  9
 7  5 10  3
 8  7 11  8
11 10 14 11
```

Przykładowy wynik

```
4
7
6
6
3
```