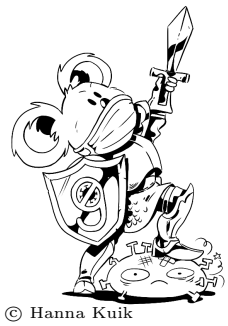


© Hanna Kuik

Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

IX edycja

finał dla szkół ponadpodstawowych

11 kwietnia 2022

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. JA i DA

Na egzotycznej wyspie mieszkają wyłącznie rycerze i łotrzy. Rycerze zawsze mówią prawdę, a łotrzy zawsze kłamią. Mieszkańcy tej wyspy rozumieją zadawane pytania, ale przy odpowiedziach używają swojego języka, w którym słowom *tak* i *nie* odpowiadają słowa *ja* i *da*, ale nie udało się dotychczas ustalić, które jest które. Spotkaliście mieszkańca wyspy i nie wiecie, kim jest. Podajcie przykład pytania, które zmusi go do wypowiedzenia słowa *ja*.

W pytaniu można używać słów *ja* i *da*, bo mieszkańcy wyspy je rozumieją; nie można używać słów *tak* lub *nie*.

2. Zabawa z ciągami

Koalątko bawi się klockami, na każdym z których jest jedna litera, układając z nich różne ciągi znaków. Koalątko może wykonywać wielokrotnie takie operacje:

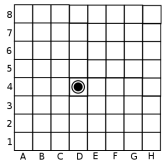
- zabrać jeden klocek,
- dołożyć jeden klocek w dowolym miejscu (także w środku ciągu),
- zamienić jeden klocek na inny (bez zmiany położenia).

W pewnym momencie koalątko utworzyło z klocków napis TAGATGGTCT. Ile co najmniej operacji musi wykonać, aby przekształcić ten napis w TGGAGACAGTCT? Podajcie te operacje i uzasadnijcie, że mniej operacji nie wystarczy.

Przykład: Z ciągu KOALA możemy otrzymać ciąg POKAZ na przykład za pomocą 4 operacji – zmieniamy klocek z literą K na P, wstawiamy klocek K między klocki O i A, zmieniamy klocek L na Z i usuwamy ostatni klocek.

3. Damka

Damka w warcabach angielskich porusza się o jedno pole na ukos, w dowolnym z czterech kierunków. Damkę postawiono się na standardowo oznaczonej szachownicy 8×8, na polu D4. Na ile sposobów damka może wykonać 5 ruchów tak, by zakończyć podróż na polu G5?



Damka może wracać na pola, na których wcześniej była. W szczególności może odwiedzić pole G5 szybciej niż w 5 ruchu, ale po 5 ruchu musi się na tym polu znaleźć.

4. Gra w pięć kart

Geralt i Ciri zostali porwani przez złego czarodzieja Vilgefortza, który zapowiedział, że uwolni ich jedynie wtedy, gdy pokonają go w grze w 5 kart. Gra wygląda następująco. Na początku Vilgefortz wybiera 5 kart ze standardowej talii 52 kart i przekazuje je Ciri. Następnie Ciri co minutę przekazuje Geraltowi jedną ze swoich kart, dopóki nie zostanie jej w ręce tylko jedna karta. Na koniec Geralt musi zgadnąć, jaką kartę Ciri ma w ręce. Jeżeli poprawnie odgadnie kolor karty (czyli określi, czy jest to kier, trefl, karo czy pik), to Ciri zostanie uwolniona. Jeśli poprawnie poda wartość karty (czyli określi, czy jest to 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W, D, K, czy A), to on sam zostanie uwolniony. Jeśli poda poprawnie zarówno kolor, jak i wartość, to oboje odzyskają wolność. Ale jeżeli pomyli zarówno kolor, jak i wartość, to nigdy już nie opuszczą lochów Vilgefortza.

Przed rozpoczęciem gry Vilgefortz zostawił Geralta i Ciri samych na kilkanaście minut. Czy są w stanie wymyślić taki sposób przekazywania kart, aby na pewno oboje lub przynajmniej jedno z nich zdołało odzyskać wolność? Im więcej osób odzyska wolność, tym lepiej.

Uwaga: Poza przekazywaniem kart Ciri nie może dawać Geraltowi żadnych znaków, fizycznych ani telepatycznych.

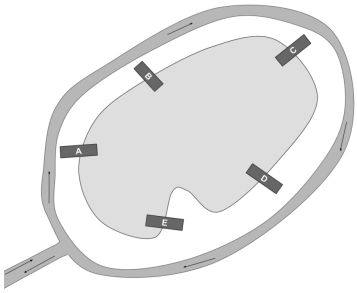
5. Laser II

W jednym rogu **sześciennego** (trójwymiarowego) pokoju znajduje się laser. W pozostałych siedmiu rogach znajdują się pochłaniacze światła, a cały pokój, włącznie z sufitem i podłogą, jest lustrzany. Laser nie może zostać przesunięty ani skierowany równolegle do żadnej ze ścian, jednak można go ustawić w dowolnym innym kierunku. Ulubioną liczbą Kasi jest 12, dlatego też chciałaby ustawić laser w taki sposób, aby światło z niego odbiło się 12 razy od ścian pokoju, a następnie zostało pochłonięte. W ile różnych punktów pokoju (na ścianach, suficie, podłodze) może Kasia wycelować laser? Wybrany punkt będzie pierwszym miejscem odbicia promienia.

Jeśli promień lasera trafi w krawędź pokoju (ale nie w narożnik), to przyjmujemy, że promień najpierw odbija się od jednej ściany, a ułamek sekundy później od drugiej ściany, czyli traktujemy to jako dwa odbicia.

6. Pomosty

Na jeziorze jest pięć pomostów A, B, C, D, E, jak na rysunku. Wędkarze: Heniek, Janusz, Mietek i Zbyszek mogą do nich dotrzeć samochodem wyłącznie jednokierunkową drogą wokół jeziora.



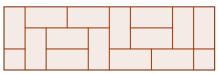
Wjazd na tę drogę znajduje się pomiędzy pomostami A i E. Kierowcy muszą skręcić w lewo i poruszać się drogą zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Każdy z naszych bohaterów ma swój ulubiony pomost. Przez $u_{\text{imię}}$ oznaczamy ulubiony pomost danego wędkarza. Pewnego dnia wędkarze przybywają nad jezioro: najpierw Heniek, po nim Janusz, potem Mietek i jako ostatni Zbyszek. Każdy jedzie do swojego ulubionego pomostu i zajmuje go, jeśli jest wolny. Jeżeli pomost jest zajęty, to wędkarz jedzie dalej i zajmuje pierwszy wolny pomost. Przerwy pomiędzy przyjazdami kolejnych wędkarzy są na tyle duże, że każdy zdąży zaparkować przed przyjazdem kolejnego wędkarza. Pomost raz zajęty pozostaje zajęty cały dzień. Ile jest ciągów $(u_{\text{Heniek}}, u_{\text{Janusz}}, u_{\text{Mietek}}, u_{\text{Zbyszek}})$ o tej własności, że pomost D pozostanie pusty?

Uwaga: Może się zdarzyć, że różni wędkarze mają ten sam ulubiony pomost.

7. Chodnik

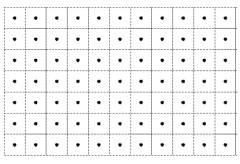
Bob Budowniczy układa chodnik z płyt o wymiarach 30 cm × 60 cm. Chodnik ma kształt prostokąta o wymiarach 90 cm × 3 m. Aby powstały wzór nie był nudny, Bob przełamał dokładnie jedną z płyt na pół – na dwa kwadraty o boku 30 cm. Kwadraty powstałe z przełamania muszą być umieszczone na brzegu, po jednym na każdym z krótszych boków prostokąta-chodnika. Na ile sposobów Bob może ułożyć chodnik? Zakładamy, że poza przełamaną płytą wszystkie pozostałe płyty są takie same.

Oto przykładowe poprawne ułożenie płyt:



8. Miś hodowca

Na łące misia hodowcy jest 77 palików, równomiernie rozłożonych, jak na rysunku, wbitych w odstępach 1-metrowych.



Przyjmujemy, że średnica palika jest tak mała, że utożsamiamy go z punktem na płaszczyźnie. Miś będzie budował zagrodę dla kozy. W tym celu chce za pomocą taśmy 12-metrowej wyznaczyć na łące czworokąt o obwodzie 12 m i polu 4 m^2. Wierzchołkami tego czworokąta muszą być paliki. Pomóżcie misiowi zaplanować zagrodę.

Wystarczy podać jedno rozwiązanie.

9. Zaokrąglenia

Wombat i koala grają w następującą grę. Wombat wybiera w tajemnicy przed koalą ułamek nieskracalny q, którego licznik jest liczbą naturalną, a mianownik – liczbą naturalną z przedziału $[1; 50]$. Następnie zaokrągla q do dwóch miejsc po przecinku i podaje koali wynik x. Zadaniem koali jest odgadnięcie dokładnej (niezaokrąglonej) wartości q. Czy koala może być pewny swojej odpowiedzi, jeśli

(a) $x = 0{,}30$? (b) $x = 0{,}50$?

Uwaga: Zaokrąglanie wykonujemy w górę lub w dół, w zależności od tego, która z liczb jest bliżej. W przypadku tej samej odległości zaokrąglamy w górę. Na przykład

$$0{,}364... \to 0{,}36$$
$$1{,}856... \to 1{,}86$$
$$0{,}485 \to 0{,}49$$

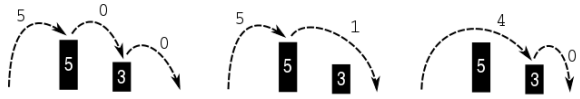
10. Skoki po kamieniach II

Na trasie biegacza stoi rząd kamieni o wysokościach kolejno:

3 1 3 4 4 1 5 3 1 1 3 1 5 3 4 4

Zawodnik dobiega do kamieni, porusza się od lewego kamienia do prawego i pokonuje przeszkody skacząc, przy czym w każdym skoku może albo skoczyć na najbliższy kamień, albo przeskoczyć kamień i stanąć na kolejnym. Nie może przeskoczyć dwóch (ani więcej) kamieni naraz. Po pokonaniu wszystkich kamieni zawodnik ląduje na ziemi. Na każdy skok biegacz zużywa tyle jednostek energii (zależnie od różnicy poziomów na początku i końcu skoku):

- 0, jeśli skoczył na taki sam poziom lub niższy;
- tyle jednostek, ile wynosi różnica wysokości, jeśli skoczył na poziom wyższy;
- 1, jeśli przeskoczył przez kamień (dowolnej wysokości) i wylądował na tym samym lub niższym poziomie od tego, z którego rozpoczął skok;
- 1 + różnica wysokości, jeśli przeskoczył przez kamień i wylądował na poziomie wyższym od tego, z którego rozpoczął skok.

Zakładamy, że biegacz jest doświadczony i potrafi pokonać kamienie tak, by zużyć w sumie najmniej energii, ile to możliwe. Ile jednostek energii zużyje?

Przykład. Załóżmy, że kamienia są tylko dwa, o wysokości kolejno 5 i 3. Jeśli biegacz skoczy po kolei na oba (i zeskoczy na ziemię), zużyje $5+0+0 = 5$ jednostek energii. Jeśli wskoczy na pierwszy i przeskoczy drugi, zużyje $5 + 1 = 6$ jednostek. Przeskoczenie pierwszego kamienia i potem zeskoczenie z drugiego kosztuje $1 + (3 - 0) + 0 = 4$ jednostki.